Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

69. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 14. APRIL 1958)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1958

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

69. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

Chen, Y. M., Some Further Asymptotic Properties of Fourier Constants 105

Baker, I. N., Zusammensetzungen ganzer Funktionen 121

Neumann, B. H., Ascending Verbal and Frattini Series 164

Thron, W. J., On Parabolic Convergence Regions for Continued Fractions 173

Rieger, G. J., Verallgemeinerung der Selbergschen Formel auf Idealklassen mod f in algebraischen Zahlkörpern 183

Shukla, H. S., On certain transformations of nearly-poised basic bilateral hypergeometric series of the type ${}_M\Psi_M$ 195

Hartman, P., On Isometries and on a Theorem of Liouville 202

CHEN, Y. M.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 105–120 (1958)

Some Further Asymptotic Properties of Fourier Constants

By
CHEN YUNG-MING

1. Introduction. The classical theory of Fourier constants may be said to date from RIEMANN. The most important general theorems concerning Fourier constants are the PARSEVAL theorem, RIESZ-FISCHER theorem, HAUSDORFF-YOUNG theorem, PALEY's theorem, and the theorems of HARDY and LITTLEWOOD [*8*, *9*].

Recently, the study of Fourier constants for monotone functions and functions defined by trigonometrical series of monotone decreasing Fourier constants has become more and more prominent. In a previous paper [*5*], the author has discussed some asymptotic integral inequalities and their applications to trigonometrical series, power series, and Laplace transforms. The present paper is concerned with some generalizations of these results and of the integrability theorems of BOAS [*1*, *2*], HEYWOOD [*11*, *12*], IZUMI-SATÔ [*13*, *14*, *15*], and SUNOUCHI [*20*].

In the present paper, a thorough study of integrability theorems by the method of asymptotic approximations of powers is attempted. This method had previously been used by MULHOLLAND [*16*, *17*] to generalize some theorems of HARDY and LITTLEWOOD on Fourier constants and power series. The same method has also been used by BOAS [*3*, pp. 196–197] to generalize theorems on integral functions. We shall use several special classes of asymptotic functions of a type "sharper" than those used by MULHOLLAND and BOAS. It is easy to see that the method to be used is better than those for obtaining theorems in the "power form" and that this method may be found useful in some other branches of analysis. We shall use the same notation throughout to denote functions of a special class, and shall use K_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$ to denote positive absolute constants or positive numbers depending on certain variables.

By $\Phi(x)$ we denote any function $\in P$, where P is the class of functions in which $\Phi(x)$ satisfies:

(1.1.a) $\Phi(x)$ is a non-negative function, such that $\Phi(x)/x$ is non-decreasing as x is increasing from zero to infinity;

(1.1.b) There exists a positive constant $k>1$, such that $\Phi(x)/x^k$ is decreasing when x is increasing from zero to infinity.

From (1.1.a) and (1.1.b), it follows that $\Phi'(x)$ exists almost everywhere in any finite interval and $\Phi'(x) \geqq \Phi(x)/x = \varphi(x)$, say, $\Phi'(x) < k\Phi(x)/x = k\varphi(x)$ $(k>1,\ 0<x<\infty)$, $x \in P$ [i.e. with $\Phi(x)=x$].

By $\Phi_1(x)$ we denote any function $\in P_1$, where P_1 is the sub-class of P in which Φ_1 satisfies (1.1.a), (1.1.b), and

(1.1.c) $\Phi_1(x)/x^{1+\delta}$ is increasing when x is increasing from zero to infinity, where $\delta>0$ is a sufficiently small constant (depending on Φ_1).

By $\Phi_2(x)$ we denote any function $\in P_2$, where P_2 is the sub-class of P_1 in which Φ_2 satisfies (1.1.a), (1.1.b), (1.1.c) and

(1.1.d) $\Phi_2(x)/x^{2-\delta}$ is decreasing when x is increasing from zero to infinity, where $\delta>0$ is a small constant.

By $\Psi(x)$ we denote any function $\in Q$, where Q is the class of functions in which $\Psi(x)$ is strictly increasing and $\Psi(x)/x^{1-\delta}$ is strictly decreasing in $(0, \pi)$ for a sufficiently small constant $\delta>0$. Then it follows that $\Psi'(x)>0$, where $\Psi'(x)$ exists almost everywhere in $(0, \pi)$; $\Psi'(x)\leq(1-\delta)\Psi(x)/x=(1-\delta)\psi(x)$, say.

By $\Psi_1(x)$ we denote any function $\in Q_1$, where Q_1 is the class of functions in which $\Psi_1(x)$ satisfies:

(1.2.a) $\Psi_1(x)$ is strictly increasing and tending to positive infinity when x is increasing from zero to infinity;

(1.2.b) $\Psi_1(x)/x^{1-\delta}$ is strictly decreasing to zero when x is increasing from zero to infinity, where $\delta>0$ is a small constant.

It follows that $\Psi_1'(x)>0$, where $\Psi_1'(x)$ exists almost everywhere in any finite interval $(0, a)$ and $\Psi_1'(x)\leq(1-\delta)\Psi_1(x)/x=(1-\delta)\psi_1(x)$, say.

By $\Psi_2(x)$ we denote any function $\in Q_2\subset Q_1$, where Q_2 is the class of functions in which Ψ_2 satisfies (1.2.a), (1.2.b), and

(1.2.c) $\Psi_2(x)/x^{\delta}$ is increasing when x is increasing from zero to infinity.

It follows that $\Psi_2'(x)\geq\delta\Psi_2(x)/x=\delta\psi_2(x)$, say.

By $\Omega_p(x)$ we denote any positive increasing function depending on $p>1$, and satisfying:

(1.3.a) $\Omega_p(x)/x^{\delta}$ is increasing with x in $(0, \pi)$, where $\delta>0$ is a sufficiently small constant;

(1.3.b) $\Omega_p(x)/x^{p-1-\delta}$ is decreasing when x is increasing from zero to π.

2. Asymptotic Inequalities. In this section we are concerned with some generalizations of the inequalities of HARDY and LITTLEWOOD [*17, 5, 7*; *10*, §§ 326, 327, 330, 346, 347]. For brevity, the complicated proofs of the following lemmas (running in a similar way as in [*17, 5*]) are not given here.

LEMMA 1. *If* $\lambda_i\geq 0$, $\Phi(x)\in P$, $\Phi_1(x)\in P_1$, *then*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi\left(\sum_1^n\lambda_i\right)}{\Phi_1(n)}\leq K_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(n\lambda_n)}{\Phi_1(n)}, \tag{2.1}$$

where $K_1=K_1(\Phi, \Phi_1)$, *depending on* Φ *and* Φ_1.

LEMMA 2. *Let* $H(x)$ *be defined by*

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt \qquad \big(h(t) \geq 0\big). \tag{2.2}$$

Then

$$\int_0^a \frac{\Phi(H(x))}{\Phi_1(x)}\,dx \leq K_2 \int_0^a \frac{\Phi(x\,h(x))}{\Phi_1(x)}\,dx, \tag{2.3}$$

where $K_2 = K_2(\Phi, \Phi_1)$, $a \geq 0$.

LEMMA 3. *Let* $\Re(x)$ *be defined by*

$$\Re(x) = \int_x^a h(t)\,dt \qquad \big(h(t) \geq 0,\ h(t) \in L(0, a)\big). \tag{2.4}$$

Then

$$\int_0^a \frac{\Phi(\Re(x))}{\Psi_1(x)}\,dx \leq K_3 \int_0^a \frac{\Phi(x\,h(x))}{\Psi_1(x)}\,dx. \tag{2.5}$$

LEMMA 4. *If* $\lambda_i \geq 0$, *then*

$$\sum_1^\infty \frac{\Psi\left(\sum_1^n \lambda_i\right)}{\Phi_1(n)} \geq K_4 \sum_1^\infty \frac{\Psi(n\,\lambda_n)}{\Phi_1(n)}, \tag{2.6}$$

where $K_4 = K_4(\Psi, \Phi_1)$.

LEMMA 5. *Under the condition of Lemma 2,*

$$\int_0^a \frac{\Psi(H(x))}{\Phi_1(x)}\,dx \geq K_5 \int_0^a \frac{\Psi(x\,h(x))}{\Phi_1(x)}\,dx, \tag{2.7}$$

where $K_5 = K_5(\Psi, \Phi_1)$.

LEMMA 6. *Under the condition of Lemma 3* (with $a = \pi$),

$$\int_0^\pi \frac{\Psi(\Re(x))}{\Psi_1(x)}\,dx \geq K_6 \int_0^\pi \frac{\Psi(x\,h(x))}{\Psi_1(x)}\,dx, \tag{2.8}$$

where $K_6 = K_6(\Psi, \Psi_1)$.

LEMMA 7 [20], [21]. *If* $u(x)$ *is increasing, and* $v(x)$ *is decreasing for* $x > 0$, $u(+0) = 0$, $v(+\infty) = 0$, *and*

$$\int_0^\infty u(x)\,dv(x) < \infty, \tag{2.9}$$

then

$$\lim_{x\to 0} u(x)\,v(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x)\,v(x) = 0, \tag{2.10}$$

and

$$\int_0^\infty u(x)\,dv(x) = -\int_0^\infty v(x)\,du(x). \tag{2.11}$$

LEMMA 8. *If* $h(x)\geqq 0$, $\{x\,h(x)/\Phi_1(x)\}\in L(0,\infty)$, $m(E)>0$, *where* E *is the point set for* $h(x)>0$,

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt, \tag{2.12}$$

then

$$K_7 < \left\{\int_0^\infty \frac{H(x)}{\Phi_1(x)}\,dx \Big/ \int_0^\infty \frac{x\,h(x)}{\Phi_1(x)}\,dx\right\} < K_8\ ^{1}). \tag{2.13}$$

LEMMA 9. *If* $h(x)\geqq 0$, $\{h(x)\,\Psi_2(x)\}\in L(0,\infty)$, $m(E)>0$, *where* E *is the point set for* $h(x)>0$, *and* $\Re(x)$ *is defined by* (2.4) (with $a=\infty$), *then*

$$K_9 < \left\{\int_0^\infty \left\{\frac{\Re(x)}{x}\right\}\Psi_2(x)\,dx \Big/ \int_0^\infty h(x)\,\Psi_2(x)\,dx\right\} < K_{10}. \tag{2.14}$$

3. Lebesgue Integrability Theorems. Suppose that λ_n is positive, and decreases steadily to zero as $n\to\infty$. Denote $\Phi|t| = \Phi(|t|)$,

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n \cos n\,x, \tag{3.1}$$

$$g(x) = \sum_1^\infty \lambda_n \sin n\,x. \tag{3.2}$$

THEOREM 1. *If* $\lambda_n\downarrow 0$, *and* $g(x)$ *is defined by* (3.2), *then* $\{\Phi|g(x)|/\Psi(x)\}$ *is integrable* $L(0,\pi)$ *if and only if the series*

$$\sum_1^\infty \frac{\Phi(n\,\lambda_n)}{n^2\,\Psi(n^{-1})} \tag{3.3}$$

is convergent.

PROOF. The argument is analogous to the proof of Theorem 4 in [5]. I shall now present a proof in condensed form.

---

[1]) The integrals may be replaced by summations of positive numbers. Thus, if $\lambda_n \geqq 0$, $S_n = \sum_1^n \lambda_\nu$, then, if $\lambda_n \not\equiv 0$,

$$K_7 < \left\{\sum_1^\infty \frac{S_n}{\Phi_1(n)} \Big/ \sum_1^\infty \frac{n\,\lambda_n}{\Phi_1(n)}\right\} < K_8.$$

(a) *Necessary condition.* Suppose that $\{\Phi|g(x)|/\Psi(x)\}\in L(0,\pi)$. Then by ([5] Lemma 4) and Lemma 3,

$$
(3.4)\qquad \left\{\begin{aligned}
\sum_{1}^{\infty}\frac{\Phi(n\lambda_n)}{n^2\Psi(n^{-1})} &\leq K_{11}\sum_{1}^{\infty}\frac{\Phi\left|\int_{1/n}^{\pi}\frac{|g(t)|}{t}\,dt\right|}{n^2\Psi(n^{-1})}\\
&\leq K_{12}\sum_{1}^{\infty}\int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n}\frac{\Phi\left(\int_{x}^{\pi}\frac{|g(t)|}{t}\,dt\right)}{\Psi(x)}\,dx\\
&\leq K_{13}\int_{0}^{\pi}\frac{\Phi\left(\int_{x}^{\pi}\frac{|g(t)|}{t}\,dt\right)}{\Psi(x)}\,dx\\
&\leq K_{14}\int_{0}^{\pi}\frac{\Phi|g(x)|}{\Psi(x)}\,dx.
\end{aligned}\right.
$$

Hence the result.

(b) *Sufficient condition.* Since $x^2\Psi(x^{-1})\in P_1$, by Lemma 1,

$$
(3.5)\qquad \left\{\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi}\frac{\Phi|g(x)|}{\Psi(x)}\,dx &\leq K_{15}\sum_{1}^{\infty}\int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n}\frac{\Phi(S_n)}{\Psi(n^{-1})}\,dx\ ^{2})\\
&\leq K_{16}\sum_{1}^{\infty}\frac{\Phi(S_n)}{n^2\Psi(n^{-1})}\\
&\leq K_{17}\sum_{1}^{\infty}\frac{\Phi(n\lambda_n)}{n^2\Psi(n^{-1})},
\end{aligned}\right.
$$

where $S_n=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu$. This completes the proof. By a similar argument, we can derive the following

THEOREM 2. *If $\lambda_n\downarrow 0$, and $f(x)$ is defined by* (3.1), *then a sufficient condition of $\{\Phi|f(x)|/\Psi(x)\}$ to be integrable $L(0,\pi)$ is the convergence of* (3.3).

THEOREM 3. *Suppose that $f(x)$ is defined by* (3.1) *where $\lambda_n\downarrow 0$, and that $\Omega_p(x)$ is defined by* (1.3.a), (1.3.b), *where $p>1$. Then $\Omega_p(x)\{f(x)\}^p$ is integrable $L(0,\pi)$ if and only if the series $\sum n^{p-2}\lambda_n^p\Omega_p(n^{-1})$ is convergent.*

PROOF. The proof is similar to that of Theorem 1 in [5]. We have, by (1.3.b) and Lemma 2,

$$
(3.6)\qquad \int_{0}^{a}\Omega_p(x)\left\{\frac{H(x)}{x}\right\}^p dx\leq K_{18}\int_{0}^{a}\Omega_p(x)\{h(x)\}^p\,dx.
$$

[2]) Cf. [5, (4.2)].

Applying Lemma 2 with $\Phi(t)=t^p$, we can prove this theorem. For brevity, the detailed proof is omitted. By a similar argument, we can derive the following

THEOREM 4. *Under the conditions of Theorem 3, except that $f(x)$ is replaced by $g(x)$, which is defined by (3.2), $\Omega_p(x)\{g(x)\}^p \in L(0,\pi)$ if and only if the series $\sum n^{p-2}\lambda_n^p \Omega_p(n^{-1})$ is convergent.*

THEOREM 5. *Suppose that $f(x)$ is positive and even in $|x|<\pi$, that it is monotone decreasing in $(0,\pi)$, and that a_n are the Fourier cosine coefficients of f. Then $f(x)/\Psi(x)$ is integrable $L(0,\pi)$ if and only if the series $\sum |a_n|/n\Psi(n^{-1})$ is convergent.*

PROOF. By [22, pp. 214—215], if we denote the integral of $f(t)$ over $(0,x)$ by $F(x)$, then

$$|a_n| \leq 2F(\pi/n), \tag{3.7}$$

$$A_n \geq K_{19} f(\pi/n) \tag{3.8}$$

where

$$A_n = \sum_1^n |a_\nu|.$$

Applying Lemma 8, and by a similar argument as in [20], one can easily prove this theorem.

By a similar way we can prove the following

THEOREM 6. *Suppose that $g(x)$ is odd, and is positive and monotone decreasing in $(0,\pi)$, and that b_n are the Fourier sine coefficients of $g(x)$. Then $g(x)/\Psi(x)$ is integrable $L(0,\pi)$ if and only if the series $\sum_1^\infty \frac{|b_n|}{n\Psi(n^{-1})}$ is convergent.*

For the proof, it should be remarked that from [20] we have

$$|b_n| \leq \frac{4}{\pi} G(\pi/n), \tag{3.9}$$

where

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt;$$

$$B_n \geq K_{20} g(\pi/n), \tag{3.10}$$

where

$$B_n = \sum_1^n |b_\nu|.$$

Thus the proof of Theorem 6 may be given in a similar way. By the same method, we can further prove the following

THEOREM 7. *Under the conditions of Theorem 5, with an addition that $p>1$, $\{f(x)\}^p/\Psi(x)$ is integrable $L(0,\pi)$ if and only if the series $\sum n^{p-2}|a_n|^p/\Psi(n^{-1})$ is convergent.*

The proof is based on (3.7), (3.8) and Lemma 2, and is analogous to the proof of Theorem 1 in [4]. For the sake of brevity, the detailed proof is not given here. There is also a corresponding theorem for odd functions:

THEOREM 8. *Under the conditions of Theorem 6, with an addition that* $p>1$, $\{g(x)\}^p/\Psi(x)\in L(0,\pi)$ *if and only if the series* $\sum n^{p-2}|b_n|^p/\Psi(n^{-1})$ *is convergent.*[3]

There are further applications of asymptotic approximations of power to the analogous theorems of Theorem 3, Theorem 4. The results are:

THEOREM 9. *Under the conditions of Theorem 7,* $\Omega_p(x)\{f(x)\}^p\in L(0,\pi)$ *if and only if the series* $\sum n^{p-2}|a_n|^p\Omega_p(n^{-1})$ *is convergent.*

THEOREM 10. *Under the conditions of Theorem 8,* $\Omega_p(x)\{g(x)\}^p\in L(0,\pi)$ *if and only if the series* $\sum n^{p-2}|b_n|^p\Omega_p(n^{-1})$ *is convergent.*

4. A Generalized Theorem by Means of Super-Multiplicative Functions[3]. HEYWOOD [12] proved the following theorem:

THEOREM (A). Suppose that $\lambda_n\downarrow 0$. Let $g(x)$ be defined by (3.2). Then for $1<\gamma<2$, $x^{-\gamma}g(x)\in L(0,\pi)$ if and only if $\sum_1^\infty n^{\gamma-1}\lambda_n$ converges.

This theorem is a special case[4] of a theorem of EDMONDS ([6] II, Theorem 13; III, Theorem 16). I shall now prove another more general theorem.

THEOREM 11. *Suppose that the super-multiplicative function* Φ_2 *is the function already defined in* § 1, *that* $g(x)$ *is defined by* (3.2), *and that* $\lambda_n\downarrow 0$. *Then* $\frac{g(x)}{\Phi_2(x)}\in L(0,\pi)$ *if and only if the series*

$$\sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{n\,\Phi_2(n^{-1})} \tag{4.1}$$

is convergent.

PROOF. Suppose at first that $\{g(x)/\Phi_2(x)\}\in L(0,\pi)$. Then by Lemma 8 and the relations

$$H(x)=\int_0^x |g(t)|\,dt, \qquad G(x)=\int_0^x g(t)\,dt, \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} H(\pi/n)\geq G(\pi/n)\geq K_{21}\sum_1^\infty (\lambda_n/n)\sin^2(\pi/2n) \\ \qquad\geq K_{22}\sum_{m=[n/3+1]}^{[2n/3]}\left(\frac{\lambda_m}{m}+\frac{\lambda_{m+n}}{m+n}+\cdots\right)\left(\frac{m\pi}{n}\right)^2 \\ \qquad\geq K_{23}\lambda_n, \end{cases} \tag{4.3}$$

[3] A function Φ is said to be super-multiplicative if $\Phi(xy)\geq\Phi(x)\Phi(y)$ for all x, y, cf. also ([17] p. 266).

[4] Also some of the results in [1] are special cases of EDMONDS' results. But our Theorem 11 does not seem to be contained in EDMONDS' results.

we have

$$(4.4)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{n\,\Phi_2(n^{-1})} \leqq K_{24} \sum_1^\infty \frac{H(\pi/n)}{n\,\Phi_2(n^{-1})} \\ \displaystyle \leqq K_{25} \sum_1^\infty \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} \frac{H(x)\,dx}{x\,\Phi_2(x)} \\ \displaystyle = K_{25} \int_0^\pi \frac{H(x)\,dx}{x\,\Phi_2(x)} \\ \displaystyle \leqq K_{26} \int_0^\pi \frac{|g(x)|}{\Phi_2(x)}\,dx. \end{cases}$$

So the condition is necessary. Conversely, suppose that the series (4.1) is convergent. Then by the properties of the super-multiplicative function $\Phi_2(x)$, we have

$$(4.5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\pi \frac{|g(x)|}{\Phi_2(x)}\,dx \leqq \int_0^\pi \frac{\left\{\sum_1^\infty \lambda_n |\sin nx|\right\}}{\Phi_2(x)}\,dx \\ \displaystyle = \sum_1^\infty \int_0^{n\pi} \frac{\lambda_n |\sin y|}{n\,\Phi_2(y/n)}\,dy \\ \displaystyle \leqq \sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{n\,\Phi_2(n^{-1})} \left\{\int_0^\infty \frac{|\sin y|}{\Phi_2(y)}\,dy\right\} \\ \displaystyle \leqq K_{27} \sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{n\,\Phi_2(n^{-1})}. \end{cases}$$

It follows that $g(x)/\Phi_2(x) \in L(0, \pi)$. Hence the proof of the sufficient condition is complete.

5. Theorems Derived from The Cauchy Integration. We shall now derive some generalizations of the theorems of IZUMI and SATÔ [*13*, *14*, *15*], in which Cauchy integrability and conditional convergence of infinite series are used instead of Lebesgue integrability and absolute convergence of infinite series.

By a proof analogous to that of [*15*], one can easily prove the following generalized form of a lemma due to R. SALEM [*18*, *19*] (I omit the proof here):

LEMMA 10. *Let* $0<M<N$, $0\leq t\leq \pi$. *Then there is an absolute constant* C, *such that*

$$\left| \int_M^N \frac{\cos ut}{\Psi_1(u)}\,du - \sum_{n=M}^{N} \frac{\cos nt}{\Psi_1(n)} \right| \leq \frac{C}{\Psi_1(M)}. \tag{5.1}$$

THEOREM 12[5]. *Let*

$$f(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx \text{ [6]}. \tag{5.2}$$

If $\Psi_1(x)$ *is a super-multiplicative function*[7], *and* $\{f(x)/x\Psi_1(x^{-1})\}\in L(0,\pi)$, *then the series* $\sum_1^{\infty} \lambda_n \Psi_1(n)$ *converges. The same holds for sine series.*

PROOF. From the formula

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \tag{5.3}$$

we can derive

$$\left\{\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} \frac{\lambda_n}{\Psi_1(n)} &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=M}^{N}\frac{1}{\Psi_1(n)}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\left\{\sum_{n=M}^{N}\frac{\cos nt}{\Psi_1(n)}\right\}dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt\int_M^N \frac{\cos ut}{\Psi_1(u)}\,du - \\
&\quad - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt\left\{\int_M^N \frac{\cos ut}{\Psi_1(t)}\,du - \sum_{n=M}^{N}\frac{\cos nt}{\Psi_1(n)}\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}(I_1+I_2), \text{ say.}
\end{aligned}\right. \tag{5.4}$$

In virtue of Lemma 10, we have

$$|I_2| \leq \frac{K_{28}}{\Psi_1(M)}\int_0^{\pi} |f(t)|\,dt = o(1) \qquad (M\to\infty). \tag{5.5}$$

[5] Cf. IZUMI-SATÔ [*15*, Theorem 1].
[6] I.e. $f(x)\in L(0,2\pi)$.
[7] It follows that $1/\Psi_1(x)$ is a sub-multiplicative function.

Write

$$I_1 = \int_0^{\pi} = \int_0^{\pi/L} + \int_{\pi/L}^{\pi} = I_{1,1} + I_{1,2}. \tag{5.6}$$

Since $\Psi_1(x)$ is a super-multiplicative function, $\frac{\cos u}{\Psi_1(u/t)}$ is an oscillating damping function (i.e. having a fixed "period" 2π, but its "amplitude" tends to zero), we have

$$\left\{\begin{aligned} |I_{1,1}| &\leqq \int_0^{\pi/L} |f(t)|\,dt \left| \int_M^N \frac{\cos ut}{\Psi_1(u)}\,du \right| \\ &= \int_0^{\pi/L} t^{-1}|f(t)|\,dt \left| \int_{Mt}^{Nt} \frac{\cos u\,du}{\Psi_1(u/t)} \right| \\ &\leqq 2\int_0^{\pi/L} \frac{|f(t)|\,dt}{t\Psi_1(t^{-1})} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u\,du}{\Psi_1(u)} \\ &\leqq K_{29} \int_0^{\pi/L} \frac{|f(t)|\,dt}{t\Psi_1(t^{-1})}\,. \end{aligned}\right. \tag{5.7}$$

which tends to zero as L tends to positive infinity. By the second mean value theorem,

$$\left\{\begin{aligned} |I_{1,2}| &\leqq \int_{\pi/L}^{\pi} |f(t)|\,dt \left| \int_M^N \frac{\cos ut}{\Psi_1(u)}\,du \right| \\ &= \frac{1}{\Psi_1(M)} \int_{\pi/L}^{\pi} |f(t)|\,dt \int_M^{\eta} \cos ut\,du \qquad (M < \eta < N) \\ &= O\left(\frac{1}{\Psi_1(M)} \int_{\pi/L}^{\pi} \frac{|f(t)|}{t}\,dt \right), \end{aligned}\right. \tag{5.8}$$

which is $o(1)$ for sufficiently large $M = M(L)$. Therefore we have $I_1 + I_2 = o(1)$, as $M \to \infty$, and hence the series $\sum_1^{\infty} \lambda_n/\Psi_1(n)$ converges.

The proof for sine series is similar. The only difference is that in the proof for sine series, all the cosine functions in Lemma 10 should be replaced by sine functions.

THEOREM 13[8]). *Let $f(x)$ be defined by* (5.2). *If $\Psi_2(x)$ is a super-multiplicative function of x, and the series $\sum \lambda_n/\Psi_2(n)$ is absolutely convergent, then*

[8]) This is a generalization of IZUMI-SATÔ's theorem; cf. [*15*, Theorem 2].

$f(x)\,x\Psi_2(x^{-1})$ is integrable in the sense of Cauchy. The analogous theorem for sine series also holds.

PROOF. Suppose that the series $\sum \lambda_n/\Psi_2(n)$ is convergent. Then by a similar reasoning on oscillating damping functions, we have

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi/N}^{\pi/M} \frac{f(t)\,dt}{t\,\Psi_2(t^{-1})} &= \int_{\pi/N}^{\pi/M} \frac{dt}{t\,\Psi_2(t^{-1})} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\Psi_2(n)} \int_{\pi/N}^{\pi/M} \frac{\Psi_2(n)\cos nt}{t\,\Psi_2(t^{-1})}\,dt \quad [9] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\Psi_2(n)} \int_{n\pi/N}^{n\pi/M} \frac{\Psi_2(n)\cos u\,du}{u\,\Psi_2(nu^{-1})} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\Psi_2(n)} \int_{n\pi/N}^{\infty} \frac{\Psi_2(n)\cos u\,du}{u\,\Psi_2(nu^{-1})} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\Psi_2(n)} \int_{n\pi/M}^{\infty} \frac{\Psi_2(n)\cos u\,du}{u\,\Psi_2(nu^{-1})} \\
&= J_1 - J_2, \quad \text{say.}
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Write

$$
J_1 = \sum_{n=1}^{N-1} + \sum_{n=N}^{\infty} = J_{1,1} + J_{1,2}. \tag{5.10}
$$

$$
|J_{1,1}| \leq \sum_{n=1}^{N-2} |S_n| \int_{n\pi/N}^{(n+1)\pi/N} \frac{\Psi_2(n)\cos u\,du}{u\,\Psi_2(nu^{-1})} + |S_{N-1}| \int_{(N-1)\pi/N}^{\infty} \frac{\Psi_2(n)\cos u\,du}{u\,\Psi_2(nu^{-1})}, \tag{5.11}
$$

where $S_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_\nu}{\Psi_2(\nu)}$. Since

$$
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos u\,du}{u\,\Psi_2(u^{-1})} < K_{30} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{u^{1-\delta}} = K_{31}, \tag{5.12}
$$

by the property of super-multiplicative functions, we have

$$
\int_0^{\infty} \frac{\Psi_2(n)\cos u\,du}{u\,\Psi_2(nu^{-1})} < K_{32} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.13}
$$

In (5.10) and (5.11), if we put $S_n \equiv K$, then J_1 is convergent. Therefore, in order to prove that J_1 is convergent, we may, without loss of generality, assume $S_n \to 0$, as $n \to \infty$. Then the second term on the right of (5.11) is $o(1)$

[9] Since $\{t\,\Psi_2(t^{-1})\}^{-1}$ is bounded and strictly decreasing in $(\pi/N, \pi/M)$, $f(x) \in L(\pi/N, \pi/M)$, the inversion of $\int \sum = \sum \int$ is legitimate ([22] § 4.44). I am indebted to Prof. IZUMI and Prof. SATÔ for pointing this out to me.

when $N \to \infty$, and the first term is less than

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N-2} |S_n| \cdot \left| \int_{n\pi/N}^{(n+1)\pi/N} \frac{\Psi_2(n)\cos u}{u\Psi_2(nu^{-1})}\, du \right| \\
&\leqq \sum_{n=1}^{N-2} |S_n| \left\{ \int_{n\pi/N}^{(n+1)\pi/N} \frac{|\cos u|\, du}{u\Psi_2(u^{-1})} \right\} \\
&\leqq K_{33} \sum_{n=1}^{N} \frac{|S_n|}{n\Psi_2(N/n)} \\
&\leqq K_{34} \sum_{n=1}^{N} \frac{|S_n|}{n(N/n)^{\delta}} \\
&\leqq K_{35} N^{-\delta} \sum_{n=1}^{M(\varepsilon)} n^{\delta-1} + \left(\frac{K_{34}}{\delta}\right)\varepsilon \\
&= o(1),
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

as $N \to +\infty$. Therefore we have

$$
|J_{1,1}| = o(1) \qquad (N \to +\infty). \tag{5.15}
$$

Since the series $\sum \lambda_n/\Psi_2(n^{-1})$ is absolutely convergent and the integral $\int_V^W \frac{\Psi_2(n)\cos u}{u\Psi_2(nu^{-1})}\, du$ is bounded, we have $J_{1,2} = o(1)$, and hence $J_1 = o(1)$. Similarly, we can prove $J_2 = o(1)$. Hence $f(t)/t\Psi_2(t^{-1})$ is integrable in the Cauchy's sense. This completes the proof.

By the same method, we can generalize the remaining theorems in [15]. The results are the following two theorems (for brevity, the proofs are not given here):

THEOREM 14. *Let $f(x)$ be defined by* (5.2). *Suppose that the series $\sum \lambda_n/\Psi_2(n)$ is convergent (not necessarily absolutely convergent), and that Ψ_2 is a super-multiplicative function, moreover,*

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\Psi_2(k^{-1})} \operatorname*{Max}_{m} |S_m - S_{[k'M]}| = o(1) \qquad (M \to +\infty), \tag{5.16}
$$

where $[k'M] \leqq m \leqq [(k'+1)M]$, $k' - k + \frac{1}{2}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k/\Psi_2(k)$. Then $\frac{f(t)}{t\Psi_2(t^{-1})}$ is integrable in Cauchy's sense.

The condition is satisfied when $\Psi_2(x) = x^{\gamma}(1 + b\log^{+} x)^{c}$, $0 < \gamma < 1$, $b > 0$, $c \leqq 0$.

THEOREM 15. *Suppose that $f(x)$ is defined by* (5.2), *that $f(t)/t\Psi_2(t^{-1})$ is integrable in Cauchy's sense, where Ψ_2 is a super-multiplicative function, and that*

$$
\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\Psi_2(k)} \operatorname*{Max}_{\xi} \left| \int_{k'\pi/M}^{\xi} \frac{f(t)\, dt}{t\Psi_2(t^{-1})} \right| = o(1) \qquad (M \to +\infty), \tag{5.17}
$$

where $k'\pi/M \leq \xi \leq (k'+1)\pi/M$, $k' = k + \frac{1}{2}$. *Then the series* $\sum \lambda_n/\Psi_2(n)$ *converges.*

6. Applications to Power Series and Laplace Transforms. The same method of asymptotic approximations of powers can be applied to power series and Laplace transforms. Some of the results (without proof) are stated as follows.

THEOREM 16[10]). *Suppose that* c_n *is positive or zero, and is ultimately non-increasing, and that* $F(x)$ *is defined by*

$$F(x) = \sum_0^\infty c_n x^n, \tag{6.1}$$

for $0 \leq x < 1$. *Then*

$$\frac{\Phi(F(x))}{\Psi(1-x)} \in L(0,1) \tag{6.2}$$

if and only if the series $\sum_1^\infty \Phi(nc_n)/n^2\Psi(n^{-1})$ *is convergent.*

THEOREM 17[11]). *Suppose that*

(i) $e^{-xt}\theta(t) \in L(0,\infty) \quad (x>0)$;

(ii) $\theta(t) > 0$, *as* $t>0$, *and is a non-increasing function*;

(iii) $\omega(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\theta(t)\,dt$.

Then $\frac{\Phi(\omega(x))}{\Psi_1(x)}$ *is integrable* $L(1,\infty)$ *if and only if*

$$\frac{\Phi(t\theta(t))}{t^2\Psi_1(t^{-1})} \in L(0,1). \tag{6.3}$$

THEOREM 18[12]). *Under the conditions of Theorem* 17, $\frac{\Phi(\omega(x))}{\Psi(x)} \in L(0,1)$ *if and only if* $\frac{\Phi(t\theta(t))}{t^2\Psi(t^{-1})}$ *is integrable* $L(1,\infty)$.

7. Theorems Derived by the Integration Argument and Functions of Bounded Variation. We are considering a certain class of functions obtained by transformation of the function x^t. This method had previously been used by MULHOLLAND [*17*] to generalize some inequalities in the "power form". Let $K(t)$ be a non-negative function defined in the interval $0 \leq a < t < b$, which is such that the integral

$$\int_a^b K(t)\,dt \tag{7.1}$$

[10]) This is a generalized HARDY-LITTLEWOOD's theorem [*5*, Theorem E]. Here we may set $\Phi(x) = x$.

[11]) Cf. [*5*, Theorem D].

[12]) Cf. [*5*, Theorem C].

is positive and finite. Define

$$J(x) = J_K(x) = \int_a^b K(t)\, x^t\, dt. \tag{7.2}$$

The detailed properties of $J(x)$ were given in [17].

Corresponding to the arguments given in [17], we can derive the following theorems:

THEOREM 19. *Suppose that a and b in (7.1) are equal to 1 and p respectively, that λ_n decreases steadily to zero, and that $g(x)$ is defined by (3.2). Then for $p>1$,*

$$\int_0^\pi \frac{J|g(x)|}{\Psi(x)}\, dx < \infty, \tag{7.3}$$

if and only if the series

$$\sum_1^\infty \frac{J(n\lambda_n)}{n^2 \Psi(n^{-1})} \tag{7.4}$$

converges.

THEOREM 20. *Under the conditions of Theorem 19 and Theorem 2,*

$$\int_0^\pi \frac{J|f(x)|}{\Psi(x)}\, dx < \infty, \tag{7.5}$$

if and only if the series (7.4) converges.

THEOREM 21. *Under the conditions of Theorems 19, 5,*

$$\int_0^\pi \frac{J(f(x))}{\Psi(x)}\, dx < \infty, \tag{7.6}$$

if and only if the series

$$\sum_1^\infty \frac{J|n a_n|}{n^2 \Psi(n^{-1})} \tag{7.7}$$

is convergent.

THEOREM 22. *Under the conditions of Theorem 6, if a and b in (7.1) are equal to 1 and p respectively then for $p>1$,*

$$\int_0^\pi \frac{J(g(x))}{\Psi(x)}\, dx < \infty, \tag{7.8}$$

if and only if the series

$$\sum_1^\infty \frac{J|n b_n|}{n^2 \Psi(n^{-1})} \tag{7.9}$$

converges.

THEOREM 23. *Under the conditions of Theorems* 16, 19,

$$\int_0^1 \frac{J(F(x))}{\Psi(1-x)}\,dx < \infty, \tag{7.10}$$

if and only if the series

$$\sum_1^\infty \frac{J(n c_n)}{n^2 \Psi(n^{-1})} \tag{7.11}$$

is convergent.

There are further analogous theorems for Laplace transforms. The analogous theorems corresponding to Theorems 17, 18 also hold.

SZ.-NAGY [*21*] proved the following theorem:

THEOREM (B). Suppose that $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ is a periodic function of period 2π, that it is of bounded variation except in some small neighbourhoods of a finite number of singular points (incongruent mod 2π), and that moreover, at each singular point α the integrals

$$\int_0 u^\gamma |dg_\alpha(u)|, \quad \int_0 u^\gamma |dh_\alpha(u)| \qquad (0<\gamma<1) \tag{7.12}$$

exist, where

$$g_\alpha(u) = \tfrac{1}{2}[f(\alpha-u) - f(\alpha-u)], \quad h_\alpha(u) = \tfrac{1}{2}[f(\alpha+u) + f(\alpha-u)]. \tag{7.13}$$

Then $f(x)$ is integrable and the series

$$\sum (|a_n| + |b_n|)/n^\gamma \tag{7.14}$$

converges, where a_n, b_n are the Fourier cosine coefficients, Fourier sine coefficients, respectively.

Corresponding to Theorem (B), I shall now prove

THEOREM 24. *Under the conditions of Theorem* (B), *and, if moreover, at each singular point* α, *the integrals*

$$\int_0 \frac{g_\alpha(u)}{\Psi(u)}\,du, \quad \int_0 \frac{h_\alpha(u)}{\Psi(u)}\,du \tag{7.15}$$

exist, then the series

$$\sum (|a_n| + |b_n|)/n\Psi(n^{-1}) \tag{7.16}$$

converges.

PROOF. By the reasoning given in the proof of Theorem (B), we may write $f(x) = \sum_1^N f_k(x)$, in which each f_k corresponds to the function on an interval containing only one singular point. Therefore, without loss of generality, we may assume that there is only one singular point α. Since $f(x)$ is of bounded variation, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, where f_1, f_2 are monotone non-decreasing bounded functions. By Theorems 5, 6, etc., we can derive the

results for $g_\alpha(u)$ and $h_\alpha(u)$, and hence for their sum. Hence the result follows at once.

[I wish to express my thanks to the referee for some remarks which brought to some improvements and corrections in this paper.]

Zusatz bei der Korrektur: In § 1, under the restrictions of (1.1.a) and (1.1.b), the function $\Phi(x)$ must be a continuous function of x. But in a wider sense, in (1.1.b), it is equally well to assume that $\Phi(x)$ is of bounded variation in any finite interval, that $\Phi(x)/x^k$ is decreasing except at an enumerable number of points, and that at each of these points $\Phi(x)$ has a "jump". The definitions of the functions $\Psi(x)$, $\Phi_1(x)$, etc. can also be defined in this way. Some special cases of several theorems in this paper [with $\Phi(x) = x$] had previously been discussed in: ALJANČIĆ, S., R. BOJANIĆ et M. TOMIĆ: Sur l'intégrabilité de certaines séries trigonométriques. Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. **8**, 67—84 (1955).

References

[*1*] BOAS, R. P., jr.: Integrability of trigonometric series. I. Duke Math. J. **18**, 787—793 (1951). — III. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **3**, 217—221 (1952). — [*2*] BOAS, R. P., jr.: Absolute convergence and integrability of trigonometric series. J. Rational Mechanics and Analysis **5**, 621—632 (1956). — [*3*] BOAS, R. P., jr.: Entire Functions, pp. 196—197. New York 1954. — [*4*] CHEN, Y. M.: On the integrability of functions defined by trigonometrical series. Math. Z. **66**, 9—12 (1956). — [*5*] CHEN, Y. M.: Some asymptotic properties of Fourier constants and integrability theorems. Math. Z. **68**, 227—244 (1957). — [*6*] EDMONDS, S. M.: The Parseval formulae for monotonic functions. II. Proc. Cambridge Phil. Soc. **46**, 231—248 (1950). — III. Proc. Cambridge Phil. Soc. **46**, 249—267 (1950). — [*7*] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions. J. für Math. **157**, 141—158 (1927). — [*8*] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants. Math. Annalen **97**, 159—209 (1926). — [*9*] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some new properties of Fourier constants. J. London Math. Soc. **6**, 3—9 (1931). — [*10*] HARDY, G. H., J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA: Inequalities. Cambridge 1952. — [*11*] HEYWOOD, P.: Integrability theorems for power series and Laplace transforms. J. London Math. Soc. **30**, 302—310 (1955). — [*12*] HEYWOOD, P.: On the integrability of functions defined by trigonometric series. I. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **5**, 71—76 (1954). — II. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **6**, 77—79 (1955). — [*13*] IZUMI, S.: Some trigonometrical series. III. J. of Math. (Tokyo) **1**, 128—136 (1953). — [*14*] IZUMI, S.: Some trigonometrical series. XI. Tôhoku Math. J. (2) **6**, 73—77 (1954). — [*15*] IZUMI, S., and M. SATÔ: Integrability of trigonometrical series. I. Tôhoku Math. J. (2) **6**, 258—263 (1954). — [*16*] MULHOLLAND, H. P.: The generalization of certain inequality theorems involving powers. Proc. London Math. Soc. (2) **33**, 481—516 (1932). — [*17*] MULHOLLAND, H. P.: Concerning the generalization of the Young-Hausdorff theorem. Proc. London Math. Soc. (2) **35**, 257—293 (1933). — [*18*] SALEM, R.: Sur les séries de Fourier des fonctions de carré sommable. Comptes Rendus **197**, 1175—1176 (1933). — [*19*] SALEM, R.: Généralisation de certains lemmes de Van der Corput et applications aux séries trigonométriques. Comptes Rendus **201**, 470—472 (1935). — [*20*] SUNOUCHI, G.: Integrability of trigonometrical series. J. of Math. (Tokyo) **1**, 99—103 (1953). — [*21*] SZ.-NAGY, B.: Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées. Acta Sci. Math. (Szeged) **13**, 118—135 (1949). — [*22*] ZYGMUND, A.: Trigonometrical Series. Warszawa-Lwów 1935.

Dept. of Math., Nanyang University, Singapore

(Eingegangen am 9. Juni 1957)

Baker, I. N.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 121—163 (1958)

Zusammensetzungen ganzer Funktionen

Von

Irvine Noel Baker

Inhaltsverzeichnis

Seite

§ 1. Einleitung 121

I. Wachstumseigenschaften der Funktion $F(z) = f\{g(z)\}$ für ganze transzendente Funktionen $f(z)$, $g(z)$ von kleiner Ordnung 122

§ 2. Bisherige Ergebnisse 122

§ 3. Der kleinste Betrag und die Niveaulinien einer Funktion, deren Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ ist 124

§ 4. Die Zusammensetzung $f\{g(z)\}$ und ihre Größe auf gewissen kreisartigen Kurven 130

II. Die Vertauschbarkeitsrelation $f\{g(z)\} = g\{f(z)\}$ 139

§ 5. Funktionen, die mit einer gegebenen Funktion vertauschbar sind 139

§ 6. Der Fall e^z 147

§ 7. Ein Problem von Szekeres 149

§ 8. Die Zerlegung einer gegebenen Funktion von endlicher Ordnung in miteinander vertauschbare Funktionen 151

§ 9. Iterationen 152

§ 10. Die zweiten Iterierten; die ganzen Lösungen $f(z)$ der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ für ganzes $F(z)$ 153

§ 11. Die lokalen Lösungen der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ für ganzes $F(z)$ 158

Literatur 163

§ 1. Einleitung

Unter der Zusammensetzung $f\{g(z)\}$ der Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ verstehen wir die „Substitution" von z durch $g(z)$ in $f(z)$. Wir nehmen an, die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$, die analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen sein mögen, seien so beschaffen, daß die „Substitution" in einem gewissen z-Gebiet sinnvoll ist. Diese Bildung ist im allgemeinen nicht kommutativ, d.h. es gilt nicht immer $f\{g(z)\} = g\{f(z)\}$.

Obwohl solche Zusammensetzungen häufig in der Mathematik auftreten (z.B. zur Vereinfachung vieler elementarer Rechnungen), sind sie in voller Allgemeinheit wenig untersucht worden. Erst 1870 hat Schröder [*1*], [*2*] den Fall der „natürlichen Iterierten" $f_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ einer gegebenen Funktion studiert:

$$f_0(z) = z, \qquad f_{n+1}(z) = f\{f_n(z)\}.$$

Hierbei führt er allerdings eine Funktionalgleichung ein, die auf Abel zurückgeht. Im späten neunzehnten Jahrhundert haben verschiedene Mathematiker (z.B. Koenigs [*3*]) die Iterierten und die verwandten Funktionalgleichungen

von ABEL und SCHRÖDER lokal untersucht, insbesondere in der Nähe eines Fixpunktes ξ der zu betrachtenden Funktion $f(z)$, d.h. eines Punktes ξ mit

$$f(\xi) = \xi.$$

Durch MONTELs Theorie der Normalfolgen wurde endlich eine systematischere, um 1920 von JULIA [4] und FATOU [5], [6] aufgebaute Iterationstheorie im Großen für gebrochene und ganze Funktionen möglich. Das Iterationsproblem ist auch im Reellen behandelt worden (z.B. von BÖDEWADT [7]).

Im folgenden beschränken wir uns auf Zusammensetzungen von ganzen Funktionen; dann ist die Zusammensetzung wieder ganz. Die allgemeine Bildung $f\{g(z)\}$ betrachten wir nur für den Fall, daß die Ordnungen von $f(z)$ und $g(z)$ beide kleiner als $\frac{1}{2}$ sind. Mittels einer Erweiterung (§ 3) der bekannten Ergebnisse über den kleinsten Betrag von Funktionen von kleiner Ordnung gewinnen wir in § 4 den Hauptsatz 3, der später in der Iterationstheorie angewendet wird. Im Teil II werden speziellere Zusammensetzungen betrachtet. Zuerst die vertauschbare

$$f\{g(z)\} = g\{f(z)\}.$$

Die Theorie der vertauschbaren Funktionen ist mit der Iterationstheorie eng verwandt, denn die Iterierten sind ja miteinander vertauschbar; und für passendes $f(z)$ kann es vorkommen, daß nur die Iterierten $f_n(z)$ mit $f(z)$ vertauschbar sind (§ 6). In § 9 bringen wir einen Beitrag zu einem neueren Problem der Iterationstheorie, namentlich zur Frage nach notwendigen Bedingungen dafür, daß eine gegebene ganze Funktion die m-te Iterierte ($m>1$ ganz) einer ganzen Funktion ist. In § 10 wird dieses Problem für den Fall $m=2$ weiter verfolgt. Schließlich ziehen wir in § 11 einige Konsequenzen der obigen Resultate für lokale Lösungen der Funktionalgleichung

$$f\{f(z)\} = F(z) \qquad \text{für ganzes } F(z);$$

wobei eine Verbesserung eines etwas lückenhaften Paragraphen unserer Arbeit [8] und eine Bemerkung zu einer Vermutung von THRON [9] gebracht werden.

I. Wachstumseigenschaften der Funktion $F(z) = f\{g(z)\}$ für ganze transzendente[1]) Funktionen $f(z)$, $g(z)$ von kleiner Ordnung

§ 2. Bisherige Ergebnisse

Es sei in der üblichen Bezeichnung

$$M(f, r) = \operatorname*{Max}_{|z|=r} |f(z)|$$

$$m(f, r) = \operatorname*{Min}_{|z|=r} |f(z)|.$$

[1]) Es sei bemerkt, daß wir in diesem Abschnitt I uns auf ganze transzendente Funktionen beschränken und der Kürze halber das Adjektiv „transzendent" weglassen.

Die Fragestellung dieses Abschnitts ergibt sich aus einer Arbeit [8, insbesondere Satz 1] über die Iterationstheorie im Großen, wo wir die folgende Tatsache benutzten: Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion von der Ordnung 0 und $F(z)=f\{f(z)\}$; dann ist $m(F,r)$ unbeschränkt mit unbegrenzt wachsendem r [man bemerke, daß $F(z)$ nicht von Ordnung 0 zu sein braucht!]. Eine untere Abschätzung für $M(F,r)$, nämlich

$$M(F,r)>M(f,r^q)$$

für eine beliebig große Konstante q und passende, beliebig große r-Werte, kam auch vor. Die Resultate von [8] lassen sich verschärfen, wenn man schärfere Aussagen über $M(F,r)$ und $m(F,r)$ zur Verfügung hat. Allgemeiner möchte man von einer zusammengesetzten ganzen Funktion $e(z)=g\{h(z)\}$, $g(z)$, $h(z)$ ganz, gern wissen, was für Beziehungen es zwischen $M(e,r)$, $M(g,r)$ und $M(h,r)$, bzw. $m(e,r)$, $m(g,r)$ und $m(h,r)$ gibt.

Den größten Betrag hat schon Pólya [10] behandelt; er hat bewiesen:

Satz (Pólya). *$e(z)$, $g(z)$ und $h(z)$ seien ganze Funktionen die* (1) *und* (2) *erfüllen:*

$$e(z)=g\{h(z)\}, \tag{1}$$

$$h(0)=0. \tag{2}$$

Dann gibt es eine bestimmte, von $e(z)$, $g(z)$ und $h(z)$ unabhängige Konstante c mit

$$M(e,r)>M\left[g,\left\{cM\left(h,\frac{r}{2}\right)\right\}\right]. \tag{3}$$

Für ganze Funktionen von kleiner Ordnung besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem größten und dem kleinsten Betrag, z.B. der

Satz. (Littlewood-Wiman [11], [12]). *$f(z)$ sei eine ganze Funktion der Ordnung $\varrho<1$. Dann ist die Menge*

$$[r;\, m(f,r)>\{M(f,r)\}^{(-\varepsilon+\cos\pi\varrho)}] \tag{4}$$

für jedes $\varepsilon>0$ unbeschränkt.

Man hat sogar Aussagen über die (obere) *Dichte* der Menge (4) und ähnlicher Mengen (Amirà [13], Besicovitch [14], Cartwright [15], Pennycuick [16]). Hiernach liegt es nahe zu fragen, ob es für den kleinsten Betrag von $e(z)=g\{h(z)\}$ Sätze gibt, die dem Pólyaschen Ergebnis entsprechen, wenigstens im Fall, daß $g(z)$ und $h(z)$ kleine Ordnung haben. Es ist allerdings zu erwarten, daß solche Sätze wesentlich komplizierter als der von Pólya sind.

In § 4 (Sätze 3 und 4) gelingt es, eine Beziehung der gesuchten Art zu finden, wobei aber die Größe $m(f,r)$ — d.h. der kleinste Betrag von $f(z)$ auf dem Kreis $|z|=r$ — durch den kleinsten Betrag auf gewissen „kreisartigen" Kurven zu ersetzen ist. Die Sätze 3 und 4 sind von Bedeutung in der Iterationstheorie, und ihre Anwendung in § 8 und § 9 bildet eine weitgehende Verschärfung der Resultate in [8].

§ 3. Der kleinste Betrag und die Niveaulinien einer Funktion, deren Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ ist

Die folgenden vorbereitenden Nebenbetrachtungen haben an und für sich schon ein gewisses Interesse. Nach dem Satz von LITTLEWOOD-WIMAN nimmt der kleinste Betrag $m(f,r)$ der ganzen Funktion $f(z)$ von kleinerer Ordnung als $\frac{1}{2}$ beliebig große Werte an. Wir fragen: *Wie groß muß r gewählt werden, damit $m(f,r)$ eine vorgegebene Größe R zum erstenmal erreicht?* Für den Zweck dieser Arbeit ist ausreichend der

Satz 1. *$f(z)$ sei eine ganze Funktion der Ordnung $\varrho<\frac{1}{2}$, ferner $r(R)$ die kleinste Lösung zu gegebenem $R>0$ der Gleichung $m(f,r)=R$, und $M_{-1}(f,r)$ die Umkehrfunktion von $M(f,r)$.*

Dann gibt es zu jedem $\delta>0$ ein $R_\delta>0$, so daß für alle $R>R_\delta$

$$M_{-1}(f,R)\leq r(R)\leq\{M_{-1}(f,R)\}^{L(\varrho)+\delta}, \tag{5}$$

wobei

$$\frac{1}{L(\varrho)}=\max_{\varrho\leq\varrho'\leq\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\varrho}{\varrho'}\right)\cos(\pi\varrho')$$

ist.

Es sei bemerkt, daß $L(0)=1$ und daß $L(\varrho)\to\infty$ für $\varrho\to\frac{1}{2}-0$. Zuerst bringen wir den

Hilfssatz 1. *Gegeben sei die ganze Funktion $f(z)$. Bei obiger Erklärung von $M(f,r)$ und $M_{-1}(f,r)$ gibt es zu den reellen Zahlen $k>1$, $\delta>0$ ein R_0, so daß für alle $R>R_0$*

$$M_{-1}(f,R^k)<(1+\delta)\{M_{-1}(f,R)\}^k<\{M_{-1}(f,R)\}^{k+\delta} \tag{6}$$

ist.

Beweis. Man setze $s=\log r$ und $V(s)=\log M(r)$. Nach dem Dreikreisesatz von HADAMARD ist $V(s)$ eine konvexe Funktion von s; insbesondere

$$\frac{V(s)-V(0)}{s}\leq\frac{V(ks)-V(0)}{ks},$$

also

$$V(ks)\geq kV(s)-(k-1)V(0). \tag{7}$$

Für wachsendes s strebt (nach dem Satz von LIOUVILLE) $\frac{V(s)-V(0)}{s}$ gegen ∞. Wegen der Konvexität von $V(s)$ strebt für unbegrenzt wachsendes s und für festes 0 auch der Ausdruck $\frac{V(s+\sigma)-V(s)}{\sigma}$ gegen ∞. Jetzt sei $\sigma>0$ so klein gewählt, daß $e^\sigma<1+\delta$. Es gibt ein s_0, so daß

$$\frac{V(ks+\sigma)-V(ks)}{\sigma}>\frac{(k-1)V(0)}{\sigma}\qquad\text{für } s>s_0.$$

Hieraus und aus (7) folgt

$$V(ks+\sigma)>kV(s),\quad\text{d.h.}\quad M(f,e^\sigma r^k)>\{M(f,r)\}^k$$

für alle genügend großen r. Also, wenn man $M(f, r) = R$ setzt, findet man

$$M_{-1}(f, R^k) < e^{\sigma}\{M_{-1}(f, R)\}^k < (1+\delta)\{M_{-1}(f, R)\}^k < \{M_{-1}(f, R)\}^{k+\delta}$$

für alle genügend großen R, w. z. b. w.

Beweis von Satz 1. Jede ganze Funktion $f_1(z)$ der Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$ läßt sich als ein einfaches kanonisches Produkt darstellen:

$$f_1(z) = C z^{n_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right), \qquad C \text{ Konstante}, \; n_0 \geqq 0 \text{ ganz}, \tag{8}$$

wobei die von Null verschiedenen Nullstellen a_n nach ihren absoluten Beträgen $b_n = |a_n|$ durch

$$0 < b_1 \leqq b_2 \leqq b_3 \leqq \cdots \tag{8'}$$

geordnet werden können. O. B. d. A. kann man den Faktor $C z^{n_0}$ weglassen. Gilt der Satz für die Produkte

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right), \tag{9}$$

so auch für die allgemeineren Produkte (8). Denn es ist

$$m(f_1, r) = |C| r^{n_0} m(f, r) \quad \text{und} \quad M(f_1, r) = |C| r^{n_0} M(f, r).$$

Unter $r_1(R)$ verstehe man die kleinste Lösung r der Gleichung $m(f_1, r) = R$. Für genügend großes R — etwa so groß, daß aus $M(f_1, r) > R$ die Ungleichung $|C| r^{n_0} > 1$ folgt — ist

$$m\{f_1, r(R)\} > m\{f, r(R)\} = R.$$

Aus der Stetigkeit von $m(f_1, r)$ folgt, daß $r_1(R) < r(R)$. Gilt Satz 1 für $f(z)$, so hat man für genügend großes R

$$r_1(R) < r(R) < \{M_{-1}(f, R)\}^{L(\varrho)+\delta/2}, \qquad \delta > 0 \text{ beliebig}. \tag{10}$$

Aus $M(f_1, r) = |C| r^{n_0} M(f, r)$ folgt

$$r = M_{-1}\{f_1, |C| r^{n_0} M(f, r)\} < M_{-1}[f_1, \{M(f, r)\}^{1+\sigma}]$$

für beliebig kleines $\sigma > 0$ und alle genügend großen r. Setzt man

$$M(f, r) = R,$$

so ist nach Hilfssatz 1

$$r = M_{-1}(f, R) < M_{-1}(f_1, R^{1+\sigma}) < \{M_{-1}(f_1, R)\}^{1+2\sigma} \tag{11}$$

für alle genügend großen R. δ sei so klein gewählt, daß

$$(1+2\sigma)\left\{L(\varrho) + \frac{\delta}{2}\right\} < L(\varrho) + \delta.$$

Dann ergeben (10) und (11)

$$r_1(R) < \{M_{-1}(f_1, R)\}^{L(\varrho)+\delta}$$

für alle genügend großen R. Die andere Hälfte von (5), d.h.

$$M_{-1}(f_1, R) < r_1(R),$$

ist trivial.

Es genügt sogar, den Satz für Funktionen mit reellen negativen Nullstellen zu beweisen, d.h. für Funktionen $g(z)$ der Form (9′):

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{b_n}\right) \tag{9′}$$

mit b_n wie in (8′). Man sieht sofort, daß

$$M(g, r) > M(f, r), \qquad m(g, r) < m(f, r), \qquad r_g(R) > r_f(R),$$

wobei $r_f(R)$ bzw. $r_g(R)$ die kleinste Lösung von $m(f, r) - R$ bzw. $m(g, r) = R$ ist. Gilt

$$r_g(R) < \{M_{-1}(g, R)\}^{L(\varrho)-\delta},$$

so folgt

$$r_f(R) < r_g(R) < \{M_{-1}(g, R)\}^{L(\varrho)+\delta} < \{M_{-1}(f, R)\}^{L(\varrho)+\delta}.$$

Man beschränke sich also auf die Funktionen (9′) von der Ordnung ϱ und betrachte deren Nullstellen, wobei die Anordnung (8′) immer noch vorausgesetzt wird. Die Verteilung von diesen Nullstellen muß man etwas eingehender untersuchen, um das Verhalten von $m(g, r)$ für unsere Zwecke ausreichend zu beschreiben. Das wird mittels einer Konstruktion von LITTLEWOOD [*11*] und BESICOVITCH [*14*] geleistet.

Die Resultate von LITTLEWOOD und BESICOVITCH. Dieser Abschnitt ist im wesentlichen der Arbeit [*14*] von BESICOVITCH entnommen, wo man Beweise für die zitierten Behauptungen findet. Wir haben eine triviale, aber bequeme Abänderung in der Bezeichnung vorgenommen, indem wir die in (12) definierten c_n, d.h. die Logarithmen der Besicovitchschen c_n einführen.

Für jedes $\alpha > \varrho$ ist $\sum_{n=1} b_n^{-\alpha}$ konvergent [*17*, S. 249]. Weil die Glieder dieser Reihe positiv und monoton abnehmend sind, folgt $n b_n^{-\alpha} \to 0$ für $n \to \infty$, daher $b_n n^{-\frac{1}{\alpha}} \to \infty$ für $n \to \infty$. Für jedes $k < 1/\varrho$ strebt also $b_n n^{-k} \to \infty$. Wir nehmen ein festes $k' < 1/\varrho$ und setzen

$$c_n = \log(b_n n^{-k'}), \qquad c_n \text{ also reell.} \tag{12}$$

Es strebt $c_n \to \infty$ mit $n \to \infty$; folglich strebt der Ausdruck

$$A_1(s) = \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_s}{s} \to \infty$$

für $s \to \infty$. $A_1(s)$ hat ein Minimum, das für höchstens endlich viele s-Werte angenommen wird; p_1 sei der größte unter diesen Werten. Dann gelten die Beziehungen

$$A_1(p_1) = d_1$$
$$c_1 \geqq d_1, \qquad c_{p_1} \leqq d_1$$
$$A_1(s) \geqq d_1 \quad \text{für} \quad s \geqq 1.$$

Auf dieselbe Weise betrachtet man das Minimum (angenommen für $s = p_2$ und für kein $s > p_2$) des Ausdrucks

$$A_2(s) = \frac{c_{p_1+1} + c_{p_1+2} + \cdots + c_{p_1+s}}{s},$$

nämlich $A_2(p_2) = d_2 > d_1$ mit $c_{p_1+1} \geqq d_2$, $c_{p_1+p_2} \leqq d_2$ und $A_2(s) \geqq d_2$ für $s \geqq 1$. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man die Folge $\{p_i\}$ mit p_i ganz und positiv, und die Folge $\{d_i\}$ mit d_i reell und $d_1 < d_2 < \cdots$. Diese Folgen sind so beschaffen, daß

$$(13)\quad \begin{cases} A_i(p_i) = \dfrac{c_{t_{i-1}+1} + c_{t_{i-1}+2} + \cdots + c_{t_i}}{p_i} - d_i, \qquad i \geqq 1, \\ c_{t_{i-1}+1} \geqq d_i, \qquad c_{t_i} \leqq d_i \\ \text{und} \\ \dfrac{c_{t_{i-1}+1} + c_{t_{i-1}+2} + \cdots + c_{t_{i-1}+s}}{s} = A_i(s) \geqq d_i \quad \text{für alle } s \geqq 1. \end{cases}$$

Hierbei ist

$$t_i = p_1 + \cdots + p_i, \qquad t_0 = 0.$$

Besicovitch hat bewiesen, daß für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ und für alle genügend große i die Ungleichung

$$(14)\qquad m(g, r) > \{M(g, r)\}^{-\varepsilon + \cos \pi \varrho'}, \qquad \varrho' = \frac{1}{k'} > \varrho$$

im Intervall

$$(15)\qquad e^{d_i}(t_i + \tfrac{1}{2})^{k'} \leqq r \leqq e^{d_{i+1}}(t_i + \tfrac{1}{2})^{k'}$$

gilt.

Wir wollen die obigen Resultate von Besicovitch anwenden, um zu zeigen, daß die die Ungleichung (14) befriedigenden r-Werte mit einer gewissen mindesten Häufigkeit vorkommen und sogar, daß benachbarte Intervalle (15) nicht allzu weit voneinander entfernt liegen. Daraus wird folgen, daß $r(R)$ und $M_{-1}(f, R)$ Größen derselben Ordnung sind.

Es seien k und k' so gewählt, daß

$$(16)\qquad \frac{1}{\varrho} > k > k' > 2; \qquad \varrho < \frac{1}{k} < \frac{1}{k'} = \varrho' < \frac{1}{2}.$$

Es strebt $b_n n^{-k} \to \infty$ mit $n \to \infty$. Also gilt für alle genügend große n

$$b_n n^{-k'} > e\, n^{k-k'}$$

und nach (12)

$$(17)\qquad c_n = \log(b_n n^{-k'}) > (k - k') \log n + 1 > (k - k') \log(n + \tfrac{1}{2}).$$

Wir setzen S_i für den rechten Endpunkt des i-ten Intervalls (15) und s_i für den linken Endpunkt des $(i+1)$-ten Intervalls:

$$S_i = e^{d_{i+1}}(t_i + \tfrac{1}{2})^{k'}$$
$$s_i = e^{d_{i+1}}(t_{i+1} + \tfrac{1}{2})^{k'}.$$

Nach (13), (17) ist

$$d_{i+1} > c_{t_{i+1}} > (k-k')\log(t_{i+1}+\tfrac{1}{2})$$

und damit

$$e^{d_{i+1}} > (t_{i+1}+\tfrac{1}{2})^{k-k'}$$

für alle genügend große i. Andererseits gilt für großes i

$$S_i > e^{d_{i+1}} > (t_{i+1}+\tfrac{1}{2})^{k-k'}$$

und somit

$$s_i < e^{d_{i+1}}(e^{d_{i+1}})^{k'/(k-k')} = e^{d_{i+1}(k/k-k')} < S_i^{k/k-k'}.$$

Nach den Resultaten von BESICOVITCH kann man die Ungleichung

$$s_i < S_i^{\left(\frac{k}{k-k'}\right)}$$

so deuten: Es gibt ein Y, so daß für $R > Y$ das Intervall $(R, R^{k/(k-k')})$ mindestens einen die Ungleichung (14) befriedigenden Punkt r enthält.

Zu gegebenem R sei r_1 die Lösung der Gleichung

$$M(g, r) = R^{\frac{1}{-\varepsilon+\cos\pi\varrho'}}.$$

R sei so groß gewählt, daß r_1 größer als Y ist. Dann liegt im Intervall $(r_1, r_1^{k/k-k'})$ wenigstens ein Punkt r_2, für den gilt

$$m(g, r_2) > \{M(g, r_2)\}^{(-\varepsilon+\cos\pi\varrho')} > \{M(g, r_1)\}^{(-\varepsilon+\cos\pi\varrho')} = R. \tag{18}$$

Weil $m(g, r)$ eine stetige Funktion von r ist, ist $r(R)$, die kleinste Lösung von $m(g, r) = R$, kleiner als r_2 und $r_2 < r_1^{k/k-k'}$. Trivialerweise ist $r(R) > M_{-1}(g, R)$. Somit haben wir tatsächlich für alle genügend großen R:

$$M_{-1}(g, R) \leq r(R) \leq \left\{M_{-1}\left(g, R^{\frac{1}{-\varepsilon+\cos\pi\varrho'}}\right)\right\}^{\frac{k}{k-k'}}. \tag{5'}$$

Nach Hilfssatz 1 ist für alle genügend großen R

$$r(R) < \{M_{-1}(g, R)\}^{\left(\frac{k}{k-k'}\right)\left(\frac{1}{-\varepsilon+\cos\pi\varrho'}+\frac{\delta}{3}\right)}, \tag{19}$$

wobei $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden darf. Im folgenden versuchen wir, im Ausdruck (19) einen möglichst kleinen Exponenten zu erhalten.

Man setze $k = 1/\varrho_1$. Die Ungleichungen (16) ergeben

$$\varrho < \varrho_1 < \varrho' < \tfrac{1}{2}. \tag{20}$$

Es sei

$$\frac{1}{L(\varrho)} = \limsup_{\substack{\varrho_1, \varrho' \\ \varrho < \varrho_1 < \varrho' < \frac{1}{2}}} (1-\varrho_1/\varrho')\cos\pi\varrho' = \max_{\varrho < \varrho' < \frac{1}{2}} (1-\varrho/\varrho')\cos\pi\varrho'.$$

Man nehme ϱ_1, ϱ' wie in (20) und ferner so, daß

$$(1-\varrho_1/\varrho')\cos\pi\varrho' > 1/\left(L(\varrho)+\delta/3\right),$$

also

$$\frac{k}{k-k'}\cdot\frac{1}{\cos\pi\varrho'} = \frac{1}{(1-\varrho_1/\varrho')\cos\pi\varrho'} < L(\varrho)+\frac{\delta}{3}.$$

$\varepsilon > 0$ war beliebig klein zu wählen; es sei so klein, daß

$$\frac{k}{k-k'} \cdot \frac{1}{-\varepsilon + \cos \pi \varrho'} < L(\varrho) + \frac{2\delta}{3}$$

für die jetzt gewählten k, k'. Mit diesen Werten von k, k' und ε, die allein von ϱ und δ abhängen, ergibt die obige Diskussion [insbesondere (5')], daß für alle genügend großen R

$$M_{-1}(g, R) \leq r(R) \leq \{M_{-1}(g, R)\}^{(L(\varrho)+\delta)} \tag{5}$$

ist. Also ist Satz 1 für die Funktion (9') und somit allgemein bewiesen worden.

Das Verhalten des kleinsten Betrages hat natürlich Konsequenzen für die Niveaulinien einer ganzen Funktion:

Satz 2. *Es seien $B > A > 0$, $R > 0$ und $g(z)$ eine in $|z| \leq B$ reguläre Funktion mit den Eigenschaften:*

$$\text{für } |z| < A \text{ ist } |g(z)| < R,$$
$$\text{für } |z| = B \text{ ist } |g(z)| > R;$$

dann gibt es in $A \leq |z| < B$ eine einfach geschlossene, den Nullpunkt enthaltende Kurve Γ, auf der $|g(z)| = R$ gilt.

Insbesondere sei $g(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$; dann gibt es ein $R_0 > 0$, so daß für alle $R > R_0$ der Kreisring

$$M_{-1}(g, R) \leq |z| < r(R+1) \tag{21}$$

eine den Nullpunkt enthaltende, einfach geschlossene Kurve Γ enthält, auf der $|g(z)| = R$ gilt.

Beweis. Man nehme die zusammenhängende (nach dem Satz vom Maximum sogar einfach zusammenhängende) Komponente K der offenen Menge $\{z \,|\, |g(z)| < R\}$, die den Kreis $|z| < A$ einschließt. Γ wird als Rand von K gewählt. Der Rand von K besteht aus Niveaukurvenstücken, auf denen $|g(z)| = R$ gilt. Aus der Kompaktheit der in der Kreisscheibe $|z| \leq B$ gelegenen Niveaukurven $|g(z)| = R$ folgt, daß diese Kurven eine endliche Gesamtbogenlänge haben. Von einem beliebigen Punkt Q auf dem Rand von K ausgehend, verfolge man irgendeinen durch Q laufenden Zweig von Rand K; man gehe immer in der gleichen Richtung weiter; stößt man auf einen Kreuzungspunkt P der Niveaukurven, indem man in P entlang dem Kurvenast α ankommt, so soll man P entlang den nach folgender Vorschrift gewählten Ast α' verlassen: α' schließt mit α in der Umgebung von P einen Winkelraum ein, dessen innere Punkte zu K gehören. Dann gehört auch der Ast α' zu Rand K. Dieser Vorschrift für jeden eventuell vorkommenden Kreuzungspunkt folgend, kann man den Rand von K unbegrenzt verfolgen. Wegen der Beschränktheit der Gesamtbogenlänge trifft man einen Punkt η mehr als einmal; Γ sei der zwischen dem ersten und zweiten Auftreten von η durchlaufene Teil von Rand K; wenn man die durchlaufene Bogenlänge als Parameter einführt, erkennt man, daß Γ eine Jordan-Kurve bildet, auf der $|g(z)| = R$ gilt. Im Innern von Γ ist $|g(z)| < R$.

Es gibt in $|z|<B$ nur endlich viele Nullstellen von $f'(z)$, d.h. Kreuzungspunkte des Niveaugebildes. Man nehme einen Punkt $\xi \in \Gamma$, der kein Kreuzungspunkt ist. Nach dem Satz vom größten Betrag wird eine kleine Kreisscheibe um ξ durch die Kurve Γ in zwei Teile K_1, K_2 geteilt, für die $|f(z)|>R$ bzw. $|f(z)|<R$. K_2 gehört zum Innern von Γ. Nun gehört Γ zum Rand von K. Es folgt, daß K mit dem Innern von Γ identisch ist und daß Γ den Nullpunkt enthält.

Die Behauptung über ganze Funktionen folgt unmittelbar aus dem ersten Teil des Satzes.

Für ganze Funktionen höherer Ordnung brauchen geschlossene Niveaulinien überhaupt nicht zu existieren; so sind die Niveaulinien von e^z z.B. die Geraden $\operatorname{Re} z = \text{konst.}$

§ 4. Die Zusammensetzung $f\{g(z)\}$ und ihre Größe auf gewissen kreisartigen Kurven

Die grundlegenden Sätze 1 und 2 kann man jetzt anwenden, um Ergebnisse über die Wertverteilung von zusammengesetzten Funktionen der Form $f\{g(z)\}$ abzuleiten.

Satz 3. *Es seien $f(z)$ und $g(z)$ ganze Funktionen der Ordnung ϱ_f bzw. ϱ_g, $0 \leq \varrho_f < \frac{1}{2}$, $0 \leq \varrho_g < \frac{1}{2}$. Dann existiert zu gegebenen $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ eine Folge von geschlossenen Jordan-Kurven Γ_i, die den Nullpunkt enthalten und außerdem folgende Eigenschaften haben: Es seien $\bar{\sigma}_i$ und $\underline{\sigma}_i$ die größte bzw. kleinste Entfernung zwischen dem Nullpunkt und Γ_i. Dann*

(i) $\underline{\sigma}_i \to \infty$,

(ii) $\bar{\sigma}_i < \underline{\sigma}_i^{L(\varrho_g)+\delta}$, *wobei $L(\varrho_g)$ die im Satz 1 erklärte Bedeutung hat,*

(iii) *auf Γ_i (die innerhalb von $|z|<\bar{\sigma}_i$ liegt) ist*

$$|f\{g(z)\}| > M\left[f, M\left(g, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_g)+\delta}}\right)\right]^{-\varepsilon+\cos \pi \varrho_f} \tag{22}$$

für $z \in \Gamma_i$. Ferner lassen sich positive Konstanten $K>1$ und r_0 finden, so daß für $s>r_0$ jeder Kreisring $s<|z|<s^K$ eine solche Kurve Γ enthält.

Beweis. Wir nehmen gemäß Satz 1 so große R-Werte, daß

$$r_g(R) < M_{-1}(g, R)^{L(\varrho_g)+\delta}$$

ist [$r_g(R)$ ist die kleinste Lösung der Gleichung $m(g, r) = R$], und daß die Voraussetzungen des Satzes 2 bezüglich der Funktion $g(z)$ erfüllt werden. Unter diesen wählen wir einen solchen Wert R_i, daß auch (Satz von LITTLEWOOD-WIMAN)

$$m(f, R_i) > \{M(f, R_i)\}^{-\varepsilon+\cos \pi \varrho_f}$$

gilt. Nach Satz 2 gibt es eine Jordan-Kurve Γ_i in dem Kreisring

$$M_{-1}(g, R_i) \leq |z| < r_g(R_i+1),$$

für die $|g(z)| = R_i$ ist. Für großes R_i ist nach Hilfssatz 1

$$r_g(R_i + 1) < \{M_{-1}(g, R_i + 1)\}^{L(\varrho_g) + \frac{\delta}{2}} < \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_g) + \delta},$$

und Γ_i liegt daher in

$$M_{-1}(g, R_i) \leq |z| < \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_g) + \delta}. \tag{23}$$

Für $z \in \Gamma_i$ hat man

$$|f\{g(z)\}| > m(f, R_i) > \{M(f, R_i)\}^{-\varepsilon + \cos \pi \varrho_f}. \tag{24}$$

Nun ist

$$\bar{\sigma}_i \leq r(R_i + 1) < \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_g) + \delta}$$

d.h.

$$R_i > M\left(g, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_g) + \delta}}\right),$$

und (24) wird somit zu (22). Weil $\underline{\sigma}_i > M_{-1}(g, R_i)$ ist, ist (23) gleichbedeutend mit

$$\underline{\sigma}_i \leq |z| \leq \bar{\sigma}_i < \underline{\sigma}_i^{L(\varrho_g) + \delta} \qquad \text{für } z \in \Gamma_i.$$

Zu beweisen bleibt nur die Aussage über die Verteilung der Γ_i-Kurven. Nehmen wir $\varepsilon' < \varepsilon$, $\frac{1}{2} > \varrho' > \varrho_f$, so daß

$$\cos(\pi \varrho') - \varepsilon' = \cos(\pi \varrho_f) - \varepsilon.$$

Aus dem Beweis von Satz 1 [vgl. (17), (18)] sieht man, daß für alle genügend großen R ($> A$ etwa) jedes Intervall (R, R^c) — wobei $c > \varrho'/(\varrho' - \varrho_f)$ — ein solches $\tilde{R}$ enthält, daß

$$m(f, \tilde{R}) > M(f, \tilde{R})^{-\varepsilon' + \cos \pi \varrho'} = M(f, \tilde{R})^{-\varepsilon + \cos \pi \varrho_f}. \tag{25}$$

Im folgenden wollen wir nur so große s-Werte wählen, daß $R = M(g, s) > A$. Nach dem Hilfssatz 1 ist für beliebiges, festes $\tilde{\varepsilon} > 0$ und passend großes s

$$M_{-1}(g, R^c) < \{M_{-1}(g, R)\}^{c + \tilde{\varepsilon}} = s^{c + \tilde{\varepsilon}}$$

und daher

$$M(g, s^{c + \tilde{\varepsilon}}) > \{M(g, s)\}^c = R^c.$$

In (R, R^c) liegt ein $\tilde{R}$, das (25) genügt. In $(s, s^{c + \tilde{\varepsilon}})$ liegt ein $\tilde{s}$ mit $M(g, \tilde{s}) = \tilde{R}$. Also liegt nach (23) im Kreisring

$$\tilde{s} \leq |z| < \tilde{s}^{L(\varrho_g) + \delta}$$

und somit sicher im Kreisring

$$s \leq |z| < s^{(c + \tilde{\varepsilon})(L(\varrho_g) + \delta)}$$

eine den Nullpunkt umschlingende Jordan-Kurve Γ des behaupteten Typs. Das K der Behauptung ist gleich

$$(c + \tilde{\varepsilon})\left(L(\varrho_g) + \delta\right).$$

Zusatz. Es ist klar, daß $M[f\{g(z)\}, r] \leq M[f, M(g, r)]$. Dann ist für die rechte Seite von (22)

$$M\left[f, M\left\{g, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_g)+\delta}}\right\}\right]^{-\varepsilon+\cos\pi\varrho_f} > M\left[f\{g(z)\}, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_g)+\delta}}\right]^{-\varepsilon+\cos\pi\varrho_f}$$
$$\geq M[f\{g(z)\}, \bar{\sigma}_i]^{\left(\frac{\cos\pi\varrho_f-\varepsilon-\varepsilon'}{L(\varrho_g)+\delta}\right)}$$

für beliebig kleines $\varepsilon' > 0$ und passend großes $\bar{\sigma}_i$ nach Hilfssatz 1.

Notwendig, daß eine gegebene ganze Funktion $\Phi(z)$ sich in der Form $\Phi(z) = f\{g(z)\}$ aus zwei ganzen Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ von kleinerer Ordnung als $\frac{1}{2}$ zusammensetzen läßt, ist die Bedingung, daß es eine Konstante $\alpha > 0$ und eine Folge von Kurven Γ_i (mit $\bar{\sigma}_i = \operatorname{Max}|z|$, $z \in \Gamma_i$) der oben beschriebenen Beschaffenheit gibt, auf denen

$$|\Phi(z)| > \{M(\Phi, \bar{\sigma}_i)\}^{\alpha} \tag{26}$$

ist. Obgleich wir jetzt Kurven Γ_i haben, für die sich der kleinste Betrag mit dem größten vergleichen läßt, wird über die absolute Größe von $|f\{g(z)\}|$ auf diesen Kurven immer noch fast nichts ausgesagt: Es wäre denkbar, etwa bei unregelmäßigem Wachstum von $f\{g(z)\}$, daß $M[f\{g(z)\}, r]$ in gewissen, die Kurven Γ_i enthaltenden Bereichen verhältnismäßig kleine Werte annimmt. Deshalb ist interessant der

Satz 4. *Es seien $f(z)$ und $g(z)$ ganze (transzendente) Funktionen der Ordnungen ϱ_f bzw. ϱ_g, $0 < \varrho_f < \frac{1}{2}$, $0 \leq \varrho_g < \frac{1}{2}$; L sei eine beliebige positive reelle Zahl. Dann gibt es eine Folge Γ_i von geschlossenen, den Nullpunkt enthaltenden, und den Anforderungen* (i) *und* (ii) *von Satz 3 genügenden Jordan-Kurven, auf denen*

$$|f\{g(z)\}| > \exp(\bar{\sigma}_i^L) \tag{27}$$

für $z \in \Gamma_i$ gilt, wobei $\bar{\sigma}_i = \operatorname{Max}_{z \in \Gamma_i} |z|$.

Beweis. Es folgt bekanntlich aus den Phragmen-Lindelöfschen Methoden, daß zu gegebenem $\varepsilon > 0$ und einer ganzen Funktion $f(z)$ der Ordnung ϱ_f, $0 < \varrho_f < \frac{1}{2}$, sich beliebig große R-Werte R_i finden lassen, für die $m(f, R_i) > \exp(R_i^{\varrho_f - \varepsilon})$. Im Beweis von Satz 3 könnte man solche Werte für R_i nehmen. Dann gibt es in

$$M_{-1}(g, R_i) \leq |z| \leq \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_g)+\delta}$$

für genügend großes R_i Kurven Γ_i, auf denen

$$|f\{g(z)\}| > \exp(R_i^{\varrho_f-\varepsilon}) > \exp\left[\left\{M\left(g, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_g+\delta)}}\right)\right\}^{\varrho_f-\varepsilon}\right]. \tag{28}$$

weil $\bar{\sigma}_i < \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_g)+\delta}$ ist. Zu gegebenem $K > 0$ ist für genügend großes $\bar{\sigma}_i$ (und also R_i)

$$M\left(g, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_g)+\delta}}\right) > \bar{\sigma}_i^{\left(\frac{K}{L(\varrho_g)+\delta}\right)}.$$

(28) wird daher zu

$$|f\{g(z)\}| > \exp\left[\bar{\sigma}_i^{\left\{\frac{K(\varrho_f-\varepsilon)}{L(\varrho_g)+\delta}\right\}}\right]. \tag{29}$$

Der Exponent von $\bar{\sigma}_i$ in (29) kann durch passende Wahl von K beliebig groß gemacht werden, insbesondere größer als das L von (27). Die Funktion $f\{g(z)\}$ ist von unendlicher Ordnung.

Bemerkung. Die Bedingung $\varrho_f > 0$ in Satz 4 ist wesentlich. Wenn $\varrho_f = 0$, $0 \leq \varrho_g < \infty$, ist es möglich, daß $f\{g(z)\}$ sogar eine endliche Ordnung hat. (Vgl. PÓLYA [*10*], BAKER [*8*].)

Nach Satz 4, wie nach dem in § 2 zitierten Satz von PÓLYA ist es klar daß $\varrho_f > 0$ eine unendliche Ordnung für $f\{g(z)\}$ zur Folge hat. Trotz der Pólyaschen Relation braucht die Wachstumsgeschwindigkeit von $f\{g(z)\}$ keineswegs so hoch wie $\exp\{\exp(r^{\varrho_g})\}$ [ein Ausdruck, der ungefähr der Zusammensetzung von $\exp(r^{\varrho_f})$ und $\exp(r^{\varrho_g})$ entspricht] zu sein. Das beruht auf der Möglichkeit einer Wechselwirkung zwischen zwei unregelmäßigen Wachstumsarten für $f(z)$ und $g(z)$. Erst wenn man weitere Wachstumsbedingungen hinzufügt [etwa $\varrho_f > 0$, $0 < \underline{\varrho}_g$ = untere Ordnung von $g(z)$] wird die Existenz eines $\alpha > 0$ gesichert, für das

$$M[f\{g(z)\}, r] \neq 0\{\exp(\exp r^{\alpha})\}.$$

Auf diese Verhältnisse gehen wir nicht näher ein. Um aber zu zeigen, daß sich die Ungleichung (27) von Satz 4 im allgemeinsten Falle nicht sehr verbessern läßt, beweisen wir den

Satz 5. *Gegeben seien zwei Konstanten ϱ_g, ϱ_G (mit $0 < \varrho_g < 1$, $0 < \varrho_G < 1$) und eine reelle Funktion $\mu(r)$ mit $\lim_{r\to\infty} \mu(r) = \infty$. Dann existieren zwei ganze Funktionen $g(z)$ und $G(z)$ der Ordnung ϱ_g bzw. ϱ_G, so daß*

$$M[G\{g(z)\}, r] < \exp(r^{\mu(r)}) \tag{30}$$

für alle genügend großen r gilt.

Da Verkleinerung von $\mu(r)$ die Behauptung verschärft, können wir von vornherein

$$\mu(r) \leq \log r \tag{31}$$

annehmen. Als Vorbereitung für den Beweis dieses Satzes schicken wir ein paar Bemerkungen über den bekannten Zusammenhang zwischen der Nullstellenverteilung und dem Wachstum einer ganzen Funktion voraus.

Hilfssatz 2. *Für ein kanonisches Produkt $g(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ sei $n(r)$ die Anzahl der Nullstellen, deren Betrag nicht größer als r ist. Wenn für $0 < \varrho < 1$ stets $n(r) \leq r^{\varrho}$, aber $n(r) = O(r^{\varrho-\varepsilon})$ für kein $\varepsilon > 0$ ist, so ist die Ordnung von $g(z)$ gleich ϱ.*

Beweis. Die Ordnung eines kanonischen Produktes ist gleich dem Konvergenzexponenten der Nullstellen (vgl. z.B. [*17*]). Nun folgt aus $n(r) \leq r^{\varrho}$ die Konvergenz von $\sum b_n^{-(\varrho+\delta)}$, $b_n = |a_n|$, für jedes positive δ (Vergleich mit

$\sum n^{-(1+\delta/\varrho)}$); d.h. der Konvergenzexponent und damit die Ordnung sind nicht größer als ϱ. Wenn die Ordnung von $g(z)$ gleich A ist, folgt aus dem Jensenschen Satz, daß $n(r)=O(r^{A+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon>0$ gilt. Wäre also die Ordnung A, $A<\varrho$, so wäre $n(r)=O(r^{A+\varepsilon})$ für jedes positive ε, also gleich $O(r^{(A+\varrho)/2})$ entgegen der Annahme des Hilfssatzes.

Bezeichnungen. Ein Polynom

$$P(z)=\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_m}\right), \qquad 0<|a_1|\leq|a_2|\cdots\leq|a_n|=T$$

soll von der Klasse (ϱ, T) sein, wenn für die Anzahlfunktion der Nullstellen $n(r)\leq r^{\varrho}$ gilt, d.h. für $|a_m|\geq m^{1/\varrho}$, $m=1, 2, \ldots, n$.

Ein festes Polynom $P(z)$ von der Klasse (ϱ, T) bestimmt für $W>T$ die Funktionenklasse $\{P, \varrho, W\}$ aller Funktionen g

$$g(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_m}\right), \qquad 0<|b_1|\leq|b_2|\leq\cdots \tag{32}$$

mit $b_i=a_i$, $i=1, \ldots, n$,

$$|b_{n+1}|>W>T,$$

und $n_g(r)\leq r^{\varrho}$.

Lemma 3a) *Für $\varrho<1$ seien ein Polynom $P(z)$ von der Klasse (ϱ, T) und ein $V>0$ gegeben. Dann gibt es ein W mit $W>V$, so daß für jede Funktion $g(z)$ der Klasse $\{P, \varrho, W\}$*

$$\tfrac{1}{2}M(P, r)<M(g, r)<2M(P, r) \tag{33}$$

für $r\leq V$ gilt.

3b) *Zu der als fest betrachten Funktion $\mu(r)$ von Satz 5 und einem Polynom $P(z)$ gibt es ein $U=U(P)$, so daß*

$$2M(P, r)<r^{\mu(r)} \tag{34}$$

für $r\geq U$ gilt. Ist P von der Klasse (ϱ, T), so werden wir immer annehmen, daß $U>T$ ist.

3c) *In 3a) wählen wir V größer als das U von 3b). Dann gelten* (33) *und*

$$M(g, r)<r^{\mu(r)} \tag{35}$$

für alle r in $[U, V]$ und $g\in\{P, \varrho, W\}$.

Beweis. 3a) Für $\left|\frac{z}{b_m}\right|<\frac{1}{2}$ ist

$$\left|\log\left(1-\frac{z}{b_m}\right)\right|=\left|\frac{z}{b_m}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{z}{b_m}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{b_m}\right)^2+\cdots\right\}\right|$$
$$<\left|\frac{z}{b_m}\right|\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots\right)=\frac{2|z|}{|b_m|}.$$

Ist

$$W>2V, \tag{36}$$

so gilt für $|z| \leqq V$ (mit der Bezeichnung $|b_m| = d_m$)

$$(37) \qquad \left|\log \prod_{m > n(W)} \left(1 - \frac{z}{b_m}\right)\right| = \sum_{m > n(W)} \left|\log\left(1 - \frac{z}{b_m}\right)\right| \leqq 2|z| \sum_{m > n(W)} d_m^{-1}.$$

Es ist $n(W) \leqq W^\varrho$. Man spalte die letzte Summe von (37) auf folgende Weise auf:

$$\sum_{m > n(W)} d_m^{-1} = \sum_{n(W) < m < W^\varrho} d_m^{-1} + \sum_{m \geq W^\varrho} d_m^{-1} = S_1 + S_2.$$

In S_1 ist $d_m > W$, also ist $S_1 < W^\varrho W^{-1}$. Für alle r gilt $n(r) \leqq r^\varrho$, d.h. es gilt

$$d_m^{-1} < m^{-1/\varrho} < m^{-2},$$

und somit

$$S_2 < \sum_{m \geq W^\varrho} m^{-2} = O(W^{-\varrho}).$$

(37) wird nun zu

$$(38) \qquad \left|\log \prod_{m > n(W)} \left(1 - \frac{z}{b_m}\right)\right| = 2|z|\, O(W^{-\varrho} + W^{\varrho-1}).$$

Offenbar kann man beliebig große W wählen, so daß (36) erfüllt und (38) beliebig klein wird. Diese Wahl kann gleichmäßig für alle $g(z) \in \{P, \varrho, W\}$ getroffen werden. Dadurch kann man erreichen, daß

$$\frac{1}{2} < \left|\prod_{m > n(W)} \left(1 - \frac{z}{b_m}\right)\right| < 2,$$

also

$$\frac{1}{2} < \left|\frac{g(z)}{P(z)}\right| < 2$$

für $|z| \leqq V$ gilt. Hieraus folgt die Ungleichung (33) für $|z| \leqq V$. 3b) und 3c) sind trivial.

Beweis von Satz 5. Der Grundgedanke der Konstruktion ist der folgende: Um die Größenbeschränkung (30) zu bewirken, werden $G(z)$ und $g(z)$ als Funktionen mit sehr unregelmäßigem Wachstum angesetzt. Nämlich $G(Z)$ kann für die Werte von Z verhältnismäßig groß sein, die als Werte von $g(z)$ dort vorkommen, wo $g(z)$ verglichen mit $|z|$ verhältnismäßig klein ist. Umgekehrt, ist $Z = g(z)$ verglichen mit $|z|$ recht groß, so soll $G(Z)$ verglichen mit $|Z|$ von mäßiger Größe sein. Dieser unbestimmte Gedanke wird verwirklicht, indem wir zwei nach ∞ strebende Folgen

$$(39) \qquad 0 < t_1 < u_1 < v_1 < w_1 < t_2 < u_2 < v_2 < w_2 < t_3 < \cdots,$$

$$(40) \qquad 0 < V_0 < W_0 < T_1 < U_1 < V_1 < W_1 < T_2 < U_2 < V_2 < W_2 < T_3 < \cdots$$

konstruieren. Mit ihnen bilden wir

$$(41) \qquad q_m = [t_m^{\varrho_g}] - [t_{m-1}^{\varrho_g}], \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

$$42) \qquad Q_m = [T_m^{\varrho_G}] - [T_{m-1}^{\varrho_G}], \qquad m = 1, 2, \ldots$$

(worin $t_0 = T_0 = 0$ zu setzen ist), die Polynome

$$p_m(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{q_k} \quad \text{der Klasse } (\varrho_g, t_m), \tag{43}$$

$$P_m(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{T_k}\right)^{Q_k} \quad \text{der Klasse } (\varrho_G, T_m) \tag{44}$$

und die ganzen Funktionen

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{q_k}, \tag{45}$$

$$G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{T_k}\right)^{Q_k}. \tag{46}$$

Wir wollen nachweisen, daß $g(z)$ und $G(z)$ die Behauptung von Satz 5 erfüllen. Für $n_g(r)$, die Anzahlfunktion der Nullstellen von $g(z)$ gilt

$$n_g(t_m) = [t_m^{\varrho_g}]$$

und für alle r mit $t_m < r < t_{m+1}$

$$n_g(r) = [t_m^{\varrho_g}] < r^{\varrho_g}.$$

Nach Hilfssatz 2 ist die Ordnung von $g(z)$ genau ϱ_g. Entsprechend ist die Ordnung von $G(z)$ genau ϱ_G.

Um die wichtigste Behauptung (30) zu beweisen, richten wir die Folgen so ein, daß für jedes $n = 1, 2, \ldots$ die endlichen Teilfolgen von (39) und (40):

$$0 < t_1 < \cdots < t_n < u_n < v_n < w_n, \tag{47}$$

$$0 < V_0 < W_0 < \cdots < V_{n-1} < W_{n-1} < T_n < U_n \tag{48}$$

die in (49) bis (53) ausgesprochenen Eigenschaften besitzen: Für jede Funktion $g_n(z)$ der Klasse $\{p_n, \varrho_g, w_n\}$ gelten

$$M(g_n, u_k) < V_{k-1}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{49}$$

$$M(g_n, v_k) > U_k, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{50}$$

$$M(g_n, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{in } [u_k, v_k], \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{51}$$

Für jede Funktion $G_n(z)$ der Klasse $\{P_{n-1}, \varrho_G, W_{n-1}\}$ gelten

$$M(G_n, r) < 2 \quad \text{in } [0, V_0], \tag{52}$$

$$M(G_n, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{in } [U_k, V_k], \qquad k = 1, \ldots, n-1. \tag{52'}$$

Weiter gilt

$$2M(P_n, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{für } r \geqq U_n. \tag{53}$$

Nehmen wir vorläufig an, die angegebenen Anforderungen (49) bis (53) für $n = 1, 2, \ldots$ seien erfüllt. Wir zeigen, daß dann die Funktionen $g(z)$ und $G(z)$ von (45) bzw. (46) die Ungleichung (30) erfüllen. Die Funktionen $g(z)$

und $G(z)$ gehören den Klassen $\{p_n, \varrho_g, w_n\}$ bzw. $\{P_n, \varrho_G, W_n\}$ für alle n an. Daraus und aus (49) bis (52′) folgen

$$M(g, u_k) < V_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{54}$$

$$M(g, v_k) > U_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{55}$$

$$M(g, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{in} \quad [u_k, v_k], \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{56}$$

$$M(G, r) < 2 \quad \text{in} \quad [0, V_0], \tag{57}$$

$$M(G, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{in} \quad [U_k, V_k], \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{57′}$$

Weil $g(z)$ bzw. $G(z)$ die Ordnung $\varrho_g < 1$ bzw. $\varrho_G < 1$ hat, gelten für alle großen r-Werte

$$M(g, r) < \exp(r^{\varrho_g + 1}) \quad \text{bzw.} \quad M(G, r) < e^r. \tag{58}$$

Allgemein gilt

$$M\{G(g), r\} \leq M\{G, M(g, r)\}. \tag{58′}$$

(i) Für r gemäß $v_{k-1} \leq r \leq u_k$ liegt $R = M(g, r)$ in $[U_{k-1}, V_{k-1}]$ nach (54), (55). Hiernach und nach (57′) ist

$$M(G, R) < R^{\mu(R)}$$

und (58′) wird zu

$$\begin{aligned} M\{G(g), r\} &< R^{\mu(R)} \\ &< \{\exp(r^{\varrho_g + 1})\}^{\mu\{\exp(r^{\varrho_g + 1})\}} \quad \text{nach (58)} \\ &< \{\exp(r^{\varrho_g + 1})\}^{r^{\varrho_g + 1}} \quad \text{nach (31)} \\ &= \exp(r^{2\varrho_g + 2}) < \exp(r^{\mu(r)}) \end{aligned}$$

für alle genügend großen r (oder k).

(ii) Für r gemäß $u_k \leq r \leq v_k$ ist nach (56)

$$R = M(g, r) < r^{\mu(r)}$$

und (58′) wird zu

$$M\{G(g), r\} \leq e^R < \exp(r^{\mu(r)})$$

für alle genügend großen r (oder k). Alle r-Werte fallen entweder in Intervalle $[v_{k-1}, u_k]$ oder Intervalle $[u_k, v_k]$, so daß die Behauptung (30) von Satz 5 bewiesen ist.

Es bleibt, die induktive Konstruktion der Folgen (39), (40) mit den Eigenschaften (49) bis (53) nachzuholen.

$n = 1$. Man wähle $t_1 > 0$ und definiere gemäß (41) und (43) das Polynom $p_1(z)$ der Klasse (ϱ_g, t_1). Nach Hilfssatz 3b existiert $u_1 = U(p_1) > t_1$, so daß für $r \geq u_1$

$$2M(p_1, r) < r^{\mu(r)} \tag{59}$$

gilt. Dann wähle man

$$V_0 > 2M(p_1, u_1) \tag{60}$$

und gemäß Lemma 3a ein $W_0 > V_0$ so, daß für jede Funktion $G_1(z) \in \{P_0, \varrho_G, W_0\}$ — wobei $P_0(z) \equiv 1$ —

$$M(G_1, r) < 2 \tag{61}$$

für $r \leq V_0$ gilt. Jetzt nimmt man ein $T_1 > W_0$, definiert gemäß (42) und (44) das Polynom $P_1(z)$ der Klasse (ϱ_G, T_1) und findet nach Hilfssatz 3b ein $U_1 = U(P_1) > T_1$ so, daß für $r \geq U_1$

$$2M(P_1, r) < r^{\mu(r)} \tag{62}$$

ist. $v_1 > u_1$ sei so gewählt, daß

$$\tfrac{1}{2} M(p_1, v_1) > U_1, \tag{63}$$

und $w_1 > v_1$ so groß, daß alle $g_1(z) \in \{p_1, \varrho_g, w_1\}$ die Ungleichungen

$$\tfrac{1}{2} M(p_1, r) < M(g_1, r) < 2M(p_1, r) \tag{64}$$

und

$$M(g_1, r) < r^{\mu(r)} \tag{65}$$

in $[u_1, v_1]$ erfüllen. Für jedes $g_1(z) \in \{p_1, \varrho_g, w_1\}$ ist nach (60) und (64)

$$M(g_1, u_1) < 2M(p_1, u_1) < V_0, \tag{66}$$

und nach (63) und (64)

$$M(g_1, v_1) > \tfrac{1}{2} M(p_1, v_1) > U_1. \tag{67}$$

Wir haben also

$$0 < t_1 < u_1 < v_1 < w_1$$

und

$$0 < V_0 < W_0 < T_1 < U_1$$

konstruiert, für die die Gln. (66), (67), (65), (61), (62) die entsprechenden Gln. (49) bis (53) der Induktionsbehauptung im Fall $n = 1$ bilden.

Allgemeiner Induktionsschritt. Jetzt nehmen wir an, die Konstruktion sei für $n = 1, 2, \ldots, N$ ausgeführt. Schon konstruiert sind die endlichen Teilfolgen

$$0 < t_1 < \cdots < t_N < u_N < v_N < w_N$$
$$0 < V_0 < \cdots < V_{N-1} < W_{N-1} < T_N < U_N.$$

Man wähle $t_{N+1} > w_N$ und definiere gemäß (41) und (43) das Polynom $p_{N+1}(z)$ der Klasse (ϱ_g, t_{N+1}). Nach Hilfssatz 3b existiert $u_{N+1} = U(p_{N+1}) > t_{N+1}$ so, daß für $r \geq u_{N+1}$

$$2M(p_{N+1}, r) < r^{\mu(r)} \tag{68}$$

gilt. Dann wähle man V_N gemäß

$$V_N > 2M(p_{N+1}, u_{N+1}) \tag{69}$$

und nach Lemma 3a ein $W_N > V_N$ so, daß für jede Funktion

$$G_{N+1}(z) \in \{P_N, \varrho_G, W_N\}$$

$$M(G_{N+1}, r) < r^{\mu(r)} \tag{70}$$

für r in $[U_N, V_N]$ gilt. Jetzt nimmt man ein $T_{N+1} > W_N$, definiert gemäß (42) und (44) das Polynom $P_{N+1}(z)$ der Klasse (ϱ_G, T_{N+1}), und bestimmt nach Hilfssatz 3b ein $U_{N+1} = U(P_{N+1}) > T_{N+1}$ so, daß

$$2M(P_{N+1}, r) < r^{\mu(r)} \tag{71}$$

für $r \geqq U_{N+1}$ gilt. $v_{N+1} > u_{N+1}$ sei so gewählt, daß

$$\tfrac{1}{2} M(p_{N+1}, v_{N+1}) > U_{N+1}, \tag{72}$$

und w_{N+1} nach Hilfssatz 3c so groß, daß alle $g_{N+1}(z) \in \{p_{N+1}, \varrho_g, w_{N+1}\}$

$$\tfrac{1}{2} M(p_{N+1}, r) < M(g_{N+1}, r) < 2M(p_{N+1}, r) \tag{73}$$

und

$$M(g_{N+1}, r) < r^{\mu(r)} \tag{74}$$

in $[u_{N+1}, v_{N+1}]$ erfüllen. Für jedes $g_{N+1}(z) \in \{p_{N+1}, \varrho_g, w_{N+1}\}$ ist nach (69) und (73)

$$M(g_{N+1}, u_{N+1}) < 2M(p_{N+1}, u_{N+1}) < V_N, \tag{75}$$

und nach (72) und (73)

$$M(g_{N+1}, v_{N+1}) > \tfrac{1}{2} M(p_{N+1}, v_{N+1}) > U_{N+1}. \tag{76}$$

Wegen

$$\{p_N, \varrho_g, w_N\} > \{p_{N+1}, \varrho_g, w_{N+1}\}$$

und

$$\{P_N, \varrho_G, W_N\} > \{P_{N+1}, \varrho_G, W_{N+1}\}$$

genügt jedes g_{N+1} den Gln. (49), (50), (51) für $n = N+1$, $k = 1, \ldots, N$, und jedes G_{N+1} der Gl. (52′) mit $n = N+1$, $k = 1, \ldots, N-1$, und der Gl. (52). Aber die Gln. (75), (76), (74), (70), (71) ergeben die Gln. (49), (50), (51) mit $n = N+1$, $k = N+1$, die Gl. (52′) mit $n = N+1$, $k = N$ und die Gl. (53) mit $n = N+1$.

Hiermit ist die Induktion beendet.

II. Die Vertauschbarkeitsrelation $f\{g(z)\} = g\{f(z)\}$

§ 5. Funktionen, die mit einer gegebenen Funktion vertauschbar sind

An und für sich ist schon die Möglichkeit einer kommutativen Zusammensetzung

$$F(z) = f\{g(z)\} = g\{f(z)\} \tag{1}$$

der ganzen Funktion $F(z)$ aus den „vertauschbaren" ganzen Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ von Interesse. Als Beispiel treten vor allem die Iterierten einer

gegebenen Funktion auf. Die Iterierten einer gegebenen Funktion $f(z)$ werden induktiv definiert:

$$f_0(z) = z, \quad f_1(z) = f(z), \quad f_{m+1}(z) = f_m\{f(z)\} = f\{f_m(z)\}, \tag{2}$$

wobei m ganz und positiv ist. Sie sind offenbar ganz. Wir werden unsere Resultate auch besonders auf die Iterationstheorie anwenden. Für Polynome haben RITT [18], [19] und JACOBSTHAL [20], für gebrochene Funktionen JULIA [21] die Zusammensetzung (1) untersucht. Auf den Fall, daß $f(z)$ und $g(z)$ [also auch $F(z)$] Polynome sind, wollen wir nicht eingehen, sondern verweisen auf [18], [19] und [20]. Die Vertauschbarkeit einer ganzen transzendenten Funktion mit einem Polynom kann man wegen des folgenden Satzes 6 weitgehend ausschließen. Im Beweis benutzen wir den

Hilfssatz 4. *Zu einer ganzen Funktion $f(z)$ gebe es zwei reelle positive Zahlen c, d und ein ganzes $n > 1$, so daß*

$$M(f, cr^n) < d\{M(f, r)\}^n; \tag{3}$$

dann ist $f(z)$ ein Polynom.

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Hadamardschen Satz, der besagt, daß $\log M(f, r)$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist. Wir setzen $\log r = x$, $\log M(f, r) = V(x)$, $\log c = \gamma$, $\log d = \delta$. (3) nimmt die Form

$$V(nx + \gamma) < n\,V(x) + \delta. \tag{4}$$

Wir zeigen, daß es reelle A und B gibt, so daß

$$V(x) < Ax + B$$

(wenigstens für alle genügend großen x). Man nehme ein festes $x_0 > \mathrm{Max}\left(0, \frac{-\gamma}{n-1}\right)$, ferner reelle A und B, welche die zwei Bedingungen

$$Ax_0 + B > V(x_0) \tag{5}$$

und

$$A\gamma - (n-1)B > \delta \tag{6}$$

gleichzeitig erfüllen, z. B.

$$B = \frac{\gamma V(x_0) - x_0\delta}{\gamma + (n-1)x_0}, \qquad A > \frac{(n-1)V(x_0) + \delta}{\gamma + (n-1)x_0}.$$

Für $x > \frac{-\gamma}{n-1}$ ist nun $nx + \gamma > x$: also mit der Definition

$$nx_0 + \gamma = x_1, \qquad nx_{k-1} + \gamma = x_k$$

ist $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$, und $x_k \to \infty$. Nach den obigen Definitionen ist

$$V(x_k) < Ax_k + B, \tag{7}$$

wie man leicht induktiv beweist: Für $k = 0$ ist (7) nach (5) richtig.

Ist $V(x_{k-1}) < A x_{k-1} + B$, so ist nach (4)

$$\begin{aligned} V(x_k) &< n V(x_{k-1}) + \delta < n A x_{k-1} + n B + \delta \\ &= A(n x_{k-1} + \gamma) + n B - A\gamma + \delta < A x_k + B \end{aligned}$$

nach (6). Wegen der Konvexität von $V(x)$ in x gilt $V(x) < Ax - B$ auch für $x_k < x < x_{k+1}$, also für alle $x \geqq x_0$. Für $M(f, r)$ bedeutet das

$$M(f, r) < e^B r^A.$$

Nach dem Satz von LIOUVILLE ist daher $f(z)$ ein Polynom.

Satz 6. *Das nichtkonstante Polynom $g(z)$ sei mit der ganzen transzendenten Funktion $f(z)$ wie in der Gl. (1) angegeben vertauschbar; dann hat $g(z)$ die Gestalt $g(z) = z e^{2\pi m i/n} + b$, m und n ganz. Umgekehrt gibt es zu jedem Paar von ganzen Zahlen m, n und jedem komplexen b eine ganze transzendente Funktion $f(z)$, die mit $g(z) = z\ e^{2\pi m i/n} + b$ vertauschbar ist.*

Beweis. Es sei $g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. Dann ist

$$F(z) = f(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n) = a_0 + a_1 f(z) + \cdots + a_n (f(z))^n. \tag{8}$$

Für alle genügend großen r ist

$$|a_0 + \cdots + a_n z^n| > \frac{|a_n| r^n}{2} \quad \text{für } |z| > r. \tag{9}$$

Also enthält das Bild von $|z| > r$ bei der Abbildung $z \to g(z) = w$ keinen Punkt der Kreisscheibe $|w| \leqq \frac{|a_n| r^n}{2}$, und das Bild $\mathfrak{B}$ von $|z| \leqq r$ enthält die ganze Kreisscheibe. Dann ist

$$\left\{ \begin{aligned} M(F, r) &= \max_{|z| \leqq r} |f(a_0 + \cdots + a_n z^n)| \\ &= \max_{w \in \mathfrak{B}} |f(w)| \geqq \max_{|w| \leqq \frac{|a_n| r^n}{2}} |f(w)| = M\left(f, \frac{|a_n| r^n}{2}\right). \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Andererseits gibt es ein $K > 0$, so daß für $|w| > K$

$$|a_0 + a_1 w + \cdots + a_n w^n| < 2 |a_n| |w^n| \tag{11}$$

ist. Zu r sei z_r^* ein solcher Wert, daß

$$M(F, r) = |F(z_r^*)|, \quad |z_r^*| = r.$$

Nach (8) ist dann

$$M(F, r) = F(z_r^*) = |a_0 + a_1 f(z_r^*) + \cdots + a_n (f(z_r^*))^n|. \tag{12}$$

Weil $M(F, r)$ nach ∞ strebt, wird $|f(z_r^*)| > K$ für alle genügend großen r; nach (11) und (12) ist dann

$$M(F, r) < 2 |a_n| |f(z_r^*)|^n \leqq 2 |a_n| \{M(f, r)\}^n; \tag{13}$$

also nach (10) und (13)

$$M\left(f, \frac{|a_n| r^n}{2}\right) \leq 2|a_n| \{M(f,r)\}^n.$$

Auf Grund des Hilfssatzes und der Annahme, $f(z)$ sei transzendent, erhält man $n=0$ oder $n=1$. Den Fall $n=0$ haben wir ausgeschlossen. Man hat noch festzustellen, welche linearen Polynome mit einer ganzen transzendenten Funktion vertauschbar sein können.

Es sei

$$f(az+b) = af(z) + b = F(z), \quad a \neq 0. \tag{14}$$

Zuerst sei $a \neq 1$. In diesem Falle führen wir die neue Veränderliche y und die neuen Funktionen $g^*(y)$, $h(y)$ ein:

$$z = y + \frac{b}{1-a}, \quad f\{z(y)\} = g^*(y), \quad g^*(y) = h(y) + \frac{b}{1-a}. \tag{15}$$

$h(y)$ ist eine ganze transzendente Funktion von y. Mit der neuen Bezeichnung erhält man aus (14)

$$h(ay) = a\,h(y). \tag{16}$$

Es sei $h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k y^k$. Dann gilt

$$h_k(a^k - a) = 0. \tag{17}$$

Für a entstehen die beiden Fälle:

(i) $$a \neq 0, \quad a \neq \exp\left(2\pi \frac{m}{n} i\right);$$

dann ist $h_k = 0$, $k = 2, 3, \ldots$, im Widerspruch zur Transzendenz von $h(y)$ und $f(z)$; also kann dieser Fall nicht eintreten

(ii) $$a = \exp\left(2\pi \frac{m}{n} i\right), \quad (m, n \text{ relativ prim}), \; m \neq 0;$$

dann muß $h(y)$ die Gestalt

$$h(y) = y \sum_{k=0}^{\infty} h'_k y^{nk} \tag{18}$$

haben, wie aus (17) ersichtlich ist. Jede solche Funktion $h(y)$ genügt der Gl. (16). Durch die Umkehrung der Transformation (15) erhält man die Funktionen $f(z)$, die mit $ze^{2\pi m i n} + b$, $m \neq 0$, vertauschbar sind.

Auch im Fall $a=1$, d.h. $g(z) = z+b$, ist $g(z)$ mit transzendenten Funktionen vertauschbar, z.B. mit $z + \sin\left(\frac{2\pi z}{b}\right)$. Damit ist der Satz 6 bewiesen.

Fixpunkte. Läßt man oben konstante Polynome zu, etwa $g(z) \equiv a$, so lautet die Vertauschbarkeitsbedingung:

$$f(a) = a$$

oder, mit der üblichen Bezeichnung: a ist ein Fixpunkt von $f(z)$. Der Wert $f'(a)$ heißt dann der „Multiplikator" von a. Diese Fixpunkte sind sehr wichtig für Untersuchungen über vertauschbare Funktionen und Iterationen, wie man im Laufe des Paragraphen sehen wird.

Zuerst wollen wir einige

Bezeichnungen und Resultate aus der Iterationstheorie erwähnen. Beweise findet man in FATOU [5]. Bis zum Ende dieses Paragraphen seien $f(z)$ und $g(z)$ ganze transzendente Funktionen. Hat $f(z)$ einen Picardschen Ausnahmewert, etwa A, so ist dieser der einzige, und $f(z)$ hat die Form

$$f(z) = A + P(z) \exp\big(G(z)\big),$$

wobei $P(z)$ ein Polynom und $G(z)$ eine ganze Funktion ist. Im Fall

$$f(z) = \alpha + (z-\alpha)^r \exp\big(G(z)\big), \qquad r \geqq 0 \text{ ganz},$$

heißt α ein „Fatouscher Ausnahmewert" (höchstens einer existiert).

Die Menge $\mathfrak{F}(f)$ bestehe aus denjenigen Punkten der komplexen Ebene, wo die Folge $\{f_n(z)\}$ aller Iterierten nicht normal ist. Der unendlich ferne Punkt wird stets zu $\mathfrak{F}(f)$ hinzugerechnet.

Ein „abstoßender" bzw. „anziehender" Fixpunkt n-ter Ordnung von $f(z)$ (n eine natürliche Zahl) ist ein Fixpunkt von $f_n(z)$ mit Multiplikator vom Betrag größer bzw. kleiner als 1. Die abstoßenden Fixpunkte jeder Ordnung gehören zu $\mathfrak{F}(f)$, die anziehenden jeder Ordnung gehören nicht zu $\mathfrak{F}(f)$.

Es seien $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$ und m, n zwei natürliche Zahlen; dann gehören $f_m(z_0)$ wie auch jede Lösung ξ der Gleichung $f_n(\xi) = z_0$ zur Menge $\mathfrak{F}(f)$ — „vollständige Invarianz" von $\mathfrak{F}(f)$.

F.I. $\mathfrak{F}(f)$ ist eine nicht leere perfekte Menge.

F.II. Jeder Punkt von $\mathfrak{F}(f)$ ist ein Häufungspunkt von Fixpunkten der $f_n(z)$.

F.III. Ein beschränktes Gebiet Δ, das den eventuell vorhandenen Fatouschen Ausnahmewert weder im Innern noch auf dem Rande enthält, und im übrigen beliebig ist, sei gegeben; dann gibt es zu jeder Umgebung δ eines beliebigen Punktes $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$ ein $N(z_0, \delta, \Delta)$, so daß δ durch jedes $f_n(z)$ mit $n > N(z_0, \delta, \Delta)$ auf ein Gebiet abgebildet wird, das Δ enthält.

F.IV. Für jedes $c \in \mathfrak{F}(f)$ und für jeden Punkt z_0, außer dem eventuell vorhandenen Fatouschen Ausnahmewert, gibt es eine Folge $z_k \to c$, $k = 1, 2, \ldots$ und natürliche Zahlen n_k, so daß $f_{n_k}(z_k) = z_0$.

Im weiteren Verlaufe der Arbeit wird die folgende Bezeichnung häufig verwandt. D sei ein Gebiet, $h(z)$ eine in D erklärte Funktion; dann bedeutet $h(D)$ das Bildgebiet von D bei der Abbildung $z \to h(z)$.

Schließlich wollen wir einen erst später benutzten Satz von H. BOHR [22] zitieren.

B. *Es sei* $0<\varrho<1$ *und* $\Phi(z)$ *eine im Kreis* $K:|z|\leqq 1$ *reguläre Funktion mit*

$$\Phi(0)=0$$

und

$$\operatorname*{Max}_{|z|\leqq\varrho}|\Phi(z)|=1.$$

Dann enthält die Bildmenge $\Phi(K)$ *einen Kreisrand* $|z|=r_\Phi$ *mit* $r_\Phi>c$, *wobei* $c=c(\varrho)$, *eine positive allein von* ϱ [*also nicht von* $\Phi(z)$] *abhängige Konstante ist.*

Hilfssätze, in denen die Fixpunkte und die Begriffe der Iterationstheorie eine Rolle spielen.

(i) $f(z)$ *und* $g(z)$ *seien miteinander vertauschbar und* ξ *sei ein Fixpunkt von* $f(z)$. *Dann ist* $g(\xi)$ *auch ein Fixpunkt von* $f(z)$. *Ist* $g'(\xi)\neq 0$, *so haben* ξ *und* $g(\xi)$ *als Fixpunkte von* $f(z)$ *denselben Multiplikator. Beweis:* trivial.

(ii) $f(z)$ *und* $g(z)$ *seien vertauschbar. Dann folgt*

(a) *aus* $z_0\in\mathfrak{F}(f)$, *daß* $g(z_0)\in\mathfrak{F}(f)$, *und*

(b) $\mathfrak{F}(f)\cup\mathfrak{F}(g)\subseteqq\mathfrak{F}\{f(g)\}$.

Beweis. (a) Es sei $z_0\in\mathfrak{F}(f)$. Um $g(z_0)$ als Mittelpunkt nehmen wir eine beliebig kleine offene Kreisscheibe K. Um z_0 als Mittelpunkt wählen wir eine so kleine Kreisscheibe C, daß $g(C)<K$. Dann nimmt $f_n(z)$ in K wenigstens alle Werte an, die $f_n\{g(z)\}=g\{f_n(z)\}$ in C annimmt. Weil $\{f_n(z)\}$ in C nicht normal ist, nehmen in C in ihrer Gesamtheit die Funktionen $f_n(z)$ alle Werte mit höchstens einer Ausnahme an. Man weiß dann dasselbe von den Funktionen $f_n(z)$ in K. K war beliebig klein. Also ist $\{f_n(z)\}$ nicht normal in $g(z_0)$.

(b) Wir wählen $z_0\in\mathfrak{F}\{f(g)\}$ und z_1 so, daß $f(z_1)=z_0$. Nach (a) liegt $g(z_0)$ in $\mathfrak{F}\{f(g)\}$, weil $g(z)$ und $f\{g(z)\}$ vertauschbar sind. Aber $g(z_0)=f\{g(z_1)\}$, und nach der vollständigen Invarianz von $\mathfrak{F}\{f(g)\}$ ist somit $z_1\in\mathfrak{F}\{f(g)\}$. Jetzt nehmen wir irgendein $c\in\mathfrak{F}(f)$. Dann gibt es nach F.IV eine Folge $z_\nu\to c$ und Iterierte f_{n_ν}, $\nu=1,2,\ldots$, mit $f_{n_\nu}(z_\nu)=z_0$, $z_0\in\mathfrak{F}\{f(g)\}$. [Bei der Wahl von $z_0\in\mathfrak{F}\{f(g)\}$ hat man darauf zu achten, daß z_0 nicht der eventuell vorhandene „Ausnahmepunkt" ist, was nach F.I möglich ist.] Dann ist nach dem oben Bewiesenen jedes $z_\nu\in\mathfrak{F}\{f(g)\}$. $\mathfrak{F}\{f(g)\}$ ist nach F.I perfekt und damit abgeschlossen; also ist $c=\lim_{\nu\to\infty}z_\nu\in\mathfrak{F}\{f(g)\}$.

Wegen der Symmetrie der Voraussetzungen ist nicht bloß $\mathfrak{F}(f)\subseteqq\mathfrak{F}\{f(g)\}$, sondern auch

$$\mathfrak{F}(f)\cup\mathfrak{F}(g)\subseteqq\mathfrak{F}\{f(g)\}.$$

Die Bedingung (b) stellt eine ziemlich starke, wenn auch unübersichtliche Einschränkung der ganzen Funktionen dar, die mit einer gegebenen ganzen Funktion vertauschbar sind. Als Anwendung von (b) beweisen wir die Behauptung

(iii) $f(z)$ *und* $g(z)$ *seien miteinander vertauschbar und mögen einen gemeinsamen Fixpunkt* c *haben; es sei ferner* $c\in\mathfrak{F}(f)$ [*also ist* $|f'(c)|\geqq 1$]; *dann ist* $|g'(c)|\geqq 1$.

Beweis. Es sei $|g'(c)| = |a_1| < 1$; dann wählen wir n so, daß

$$|g_n'(c)| = |a_1|^n < \frac{1}{|f'(c)|}.$$

Es ist

$$f\{g_n(c)\} = c, \quad \left|\frac{df g_n(z)}{dz}\right|_{z=c} = |a_1|^n |f'(c)| < 1,$$

woraus folgt, daß $c \notin \mathfrak{F}\{f(g_n)\}$. Dies ist aber ein Widerspruch, da auf Grund der Vertauschbarkeit von $f(z)$ und $g_n(z)$ nach (b) $c \in \mathfrak{F}\{f(g_n)\}$.

(iv) *$f(z)$ und $g(z)$ seien miteinander vertauschbar; wenn $f(z)$ den Fatouschen Ausnahmewert ξ hat, so ist ξ auch für $g(z)$ Fatouscher Ausnahmewert.*

Beweis. Es gibt zwei Fälle.

(a) $f(z) = \xi$ hat nur die Wurzel $z = \xi$ und $f(z)$ die Form

$$f(z) = \xi + (z - \xi)^r \exp Q(z),$$

$r > 0$ ganz, $Q(z)$ ganze Funktion.

Wenn $g(z) = \xi$ entweder keine Wurzel oder nur die Wurzel $z = \xi$ hat, so ist ξ Fatouscher Ausnahmewert von $g(z)$. Wir nehmen an, daß es eine Wurzel $z = \eta \neq \xi$ von $g(z) = \xi$ gibt, und werden einen Widerspruch herleiten. Weil $\eta \neq \xi$ ist, gibt es unendlich viele Θ mit $f(\Theta) = \eta$. Aus $f\{g(\Theta)\} = g\{f(\Theta)\} = g(\eta) = \xi$ folgt aber $g(\Theta) = \xi$. Durch Wiederholung dieses Beweises zeigt man, daß $g(z)$ in jedem der Werte $(f_n)^{-1}(\eta)$, d. h. der Werte α mit $f_n(\alpha) = \eta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ den Wert ξ hat.

Aus der Iterationstheorie (F. IV) weiß man, daß diese Menge im Endlichen Häufungspunkte hat, und zwar die Punkte der perfekten Menge $\mathfrak{F}(f)$. Die ξ-Punkte der transzendenten Funktion $g(z)$ können aber keinen endlichen Häufungspunkt haben.

(b) $f(z) = \xi$ hat keine Wurzel. Dann ist es klar, daß $g(z) = \xi$ höchstens die Wurzel $z = \xi$ besitzt.

Es ist bemerkenswert, daß Vertauschbarkeit von $g(z)$ mit einer gegebenen Funktion $f(z)$ ganz allgemein eine Einschränkung des Wachstums von $g(z)$ durch die Iterierten $f_n(z)$ bedeutet.

Satz 7. *$f(z)$ und $g(z)$ seien vertauschbar; dann gibt es eine ganze positive Zahl n und ein $R_0 > 0$, so daß für alle $r > R_0$*

$$M(f_n, r) > M(g, r).$$

Beweis. z_0 sei ein Punkt in $\mathfrak{F}(f)$; wenn $f(z)$ einen Fatouschen Ausnahmewert ξ besitzt, wählen wir ein solches z_0, daß $|z_0 - \xi| > 2$ ist. Es sei K ein Kreis vom Radius 1 um den Punkt z_0. Falls $f(z)$ nun den Ausnahmewert ξ besitzt, ist ξ nach (iv) auch Ausnahmewert von $g(z)$; weil $\xi \notin K$, ist also $\xi \notin g(K)$. Es gibt somit stets eine ganze positive Zahl m, so daß $f_m(K)$ das beschränkte, das eventuell vorkommende ξ nicht enthaltende Gebiet $g(K)$ überdeckt (F. III). Wir können m sogar so wählen, daß $f_{m'}(K) \supset g(K)$ für alle $m' > m$ ist.

z_0 ist ein Häufungspunkt von Fixpunkten der Iterierten $f_\nu(z)$; also gibt es ein η mit

$$|\eta - z_0| < \tfrac{1}{3}, \qquad f_p(\eta) = \eta.$$

Es sei K' der größte Kreis um η als Mittelpunkt, der in K enthalten ist. K' enthält z_0 im Innern und habe den Radius r'. Wir können o.B.d.A. annehmen, p sei so groß gewählt, daß

$$f_p(K) \supset K \tag{19}$$

und

$$f_p(K) \supset g(K). \tag{20}$$

Durch die lineare Transformation $w = \frac{z-\eta}{r'}$ bilde man jetzt den Kreis K' (vom Radius r') auf den Einheitskreis $|w| \leqq 1$ ab und wende den oben zitierten Bohrschen Satz B auf die Funktion

$$\Phi(w) = \frac{f_{np}(\eta + r'w) - \eta}{\underset{z \in K''}{\operatorname{Max}} |f_{np}(z) - \eta|}$$

an, wobei K'' der um η als Mittelpunkt beschriebene Kreis vom Radius $\frac{3}{4}r'$ ist, der dem Kreis $|w| \leqq \frac{3}{4}$ bei der Transformation entspricht. In Satz B ist $\varrho = \frac{3}{4}$ zu wählen. Man findet $f_{np}(K')$ und a fortiori $f_{np}(K)$ enthält einen Kreisrand um den Mittelpunkt η, dessen Radius mindestens

$$c\left(\tfrac{3}{4}\right) \underset{z \in K''}{\operatorname{Max}} |f_{np}(z) - \eta| \tag{21}$$

beträgt. Weil K'' den Punkt z_0 in seinem Innern enthält, strebt der Ausdruck (21) gegen ∞ für $n \to \infty$ (F.III). Für großes n enthält also $f_{np}(K)$ einen größten Kreisrand C_n um η, dessen kleinster Abstand vom Nullpunkt größer als

$$\varrho_n = \tfrac{1}{2}\, c\left(\tfrac{3}{4}\right) \underset{z \in K''}{\operatorname{Max}} |f_{np}(z)| \tag{22}$$

ist. Für eine geeignete ganze positive Zahl a ist nun, wegen $z_0 \in K''$,

$$f_{ap}(K'') \supset K,$$

und

$$f_{(n+a+1)p}(K'') \supset f_p\{f_{np}(K)\} \supset f_p(C_n).$$

Also ist

$$\underset{z \in K''}{\operatorname{Max}} |f_{(n+a+1)p}(z)| \geqq \underset{z \in C_n}{\operatorname{Max}} |f_p(z)| \geqq \frac{4}{c^2\left(\frac{3}{4}\right)} \underset{z \in C_n}{\operatorname{Min}} |z| \geqq \frac{4\varrho_n}{c^2\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{c\left(\frac{3}{4}\right)} \underset{z \in K''}{\operatorname{Max}} |f_{np}(z)| \tag{23}$$

für alle genügend großen ϱ_n (also n) – im folgenden wird diese letzte Bedingung nicht mehr ausdrücklich erwähnt. Für den kleinsten Abstand A_n des Kreisrandes von C_n vom Nullpunkt gilt nach (22), (23):

$$A_n > \varrho_n > \underset{z \in K''}{\operatorname{Max}} |f_{(n-a-1)p}(z)| = R_n. \tag{24}$$

Wegen (19) ist $R_{n+1} > R_n$. Man nehme ein ϱ mit $R_n < \varrho < R_{n+1}$. Dann gilt

$$M(g, \varrho) < M(g, R_{n+1}) \leqq \underset{z \in C_{n+1}}{\operatorname{Max}} |g(z)| \leqq \underset{z \in f_{(n+1)p}(K)}{\operatorname{Max}} |g(z)|. \tag{25}$$

Es ist nach (20)

$$g\{f_{(n+1)\,p}(K)\} = f_{(n+1)\,p}\{g(K)\} < f_{(n+2)\,p}(K). \tag{26}$$

Wir bemerken weiter, daß $\bar{K}_n$ — die abgeschlossene Kreisscheibe $|z| \leq R_n$ das Gebiet $f_{(n-2a-1)\,p}(K)$ enthält, weil $f_{a\,p}(K'') > K$ und (24) gilt.

Hieraus folgt, daß

$$f_{(2a+3)\,p}(\bar{K}_n) > f_{(2a+3+n-2a-1)\,p}(K) = f_{(n+2)\,p}(K),$$

und wegen (25), (26)

$$M(g, \varrho) < \max_{z \in f_{(n-1)\,p}(K)} |g(z)| \leq \max_{z \in f_{(n-2)\,p}(K)} |z| \leq \max_{z \in \bar{K}_n} |f_{(2a+3)\,p}(z)|$$
$$= M(f_{(2a+3)\,p}, R_n) < M(f_{(2a+3)\,p}, \varrho).$$

Der Herleitung nach gilt die Ungleichung

$$M(g, \varrho) < M(f_{(2a+3)\,p}, \varrho)$$

für alle genügend großen ϱ.

§ 6. Der Fall e^z

Welche ganzen Funktionen sind mit einer gegebenen $f(z)$ vertauschbar? Es ist klar, daß alle die Iterierten $f_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, diese Eigenschaft haben. Im Beweis von Satz 6 haben wir Funktionen $f(z)$ gefunden, die mit anderen Funktionen vertauschbar sind, die keine Iterierten von $f(z)$ sind. Insbesondere war Vertauschbarkeit mit gewissen linearen Polynomen möglich. Es kann jedoch vorkommen, daß jede nicht konstante, mit $f(z)$ vertauschbare ganze Funktion eine Iterierte $f_n(z)$ ist. Ein Beispiel dafür ist die Exponentialfunktion. Allgemeiner gilt der

Satz 8. *$g(z)$ sei eine mit $f(z) = a e^{bz} - c$ vertauschbare ganze Funktion; dabei sollen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ vorausgesetzt werden. Dann ist $g(z)$* (i) *eine Konstante [Fixpunkt von $f(z)$], oder* (ii) *$g(z) = z$, oder* (iii) *$g(z) = f_n(z)$ für ein ganzes $n \geq 1$.*

Beweis. Ist $g(z)$ ein nichtkonstantes Polynom, so hat dieses nach Satz 6 die Form

$$g(z) = \alpha z + \beta, \qquad |\alpha| = 1.$$

Die Vertauschbarkeitsbedingung lautet

$$\alpha a e^{bz} + \alpha c + \beta = a \exp(b\alpha z + b\beta) + c = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n.$$

Aus

$$\frac{2d_2}{d_1} - b = b\alpha$$

folgt $\alpha = 1$, und aus

$$d_1 = b\alpha a = b\alpha a e^{b\beta}$$

folgt zuerst $e^{b\beta} = 1$, und weil

$$d_0 = \alpha a + \alpha c + \beta = a e^{b\beta} + c$$

ist schließlich $\beta = 0$.

Es sei also $g(z)$ transzendent. $f(z)$ hat den Fatouschen Ausnahmewert c, der folglich auch für $g(z)$ Fatouscher Ausnahmewert ist [§ 5 (IV)]:

$$g(z) = c + (z-c)^m \exp P(z), \qquad m \geqq 0 \text{ ganz}, \tag{27}$$

wobei $P(z)$ eine ganze Funktion ist.

(a) Wir führen die Annahme, es sei $m > 0$ und damit $g(c) = c$ auf einen Widerspruch zurück. Aus der Vertauschbarkeit folgt:

$$\begin{aligned} a \exp\{b\, g(z)\} + c = g(a\, e^{bz} + c) &= g\left[a \exp\left\{b\left(z + \frac{2\pi i}{b}\right)\right\} + c\right] \\ &= a \exp\left\{b\, g\left(z + \frac{2\pi i}{b}\right)\right\} + c \end{aligned}$$

und somit

$$g\left(z + \frac{2\pi i}{b}\right) = g(z) + \frac{2\pi N i}{b}, \qquad N \text{ ganz}. \tag{28}$$

Weil $g(z) = c$ allein für $z = c$ gilt, ist $g(z)$ nicht periodisch, also $N \neq 0$. Ist andererseits $N \neq 0$, so nimmt $g(z)$ den Wert $c - \frac{2\pi N i}{b}$ unendlich oft in geeigneten $\xi_1, \xi_2, \ldots$ an. In $\xi_1 + \frac{2\pi i}{b}, \xi_2 + \frac{2\pi i}{b}, \ldots$ nimmt aber nach (28) $g(z)$ den Wert c an. Das widerspricht aber der Gl. (27).

(b) In (27) bleibt nur noch der Fall $m = 0$ zu untersuchen. Weil $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt, können wir (27) in der Form schreiben:

$$g(z) = c + a \exp b\, g_{(1)}(z) = f\{g_{(1)}(z)\}, \tag{29}$$

wobei $g_{(1)}(z)$ eine ganze Funktion ist. Wegen der Vertauschbarkeit von $g(z)$ und $f(z)$ ist

$$c + a \exp\{b\, c + b\, a \exp(b\, g_{(1)}(z))\} = c + a \exp\{b\, g_{(1)}(c + a\, e^{bz})\},$$

woraus folgt

$$c + a \exp\{b\, g_{(1)}(z)\} = g_{(1)}(c + a\, e^{bz}) + \frac{2\pi M i}{b}, \qquad M \text{ ganz}.$$

Weil die Funktion $g(z)$ sich nicht ändert, wenn $g_{(1)}(z)$ durch $g_{(1)}(z) + \frac{2\pi M i}{b}$ ersetzt wird, dürfen wir $M = 0$ setzen; d.h. $g_{(1)}(z)$ ist vertauschbar mit $f(z)$:

$$c + a \exp\{b\, g_{(1)}(z)\} = g_{(1)}(c + a\, e^{bz}).$$

Wir wenden die für $g(z)$ oben gewonnenen Ergebnisse auf $g_{(1)}(z)$ an. Entweder ist $g_{(1)}(z) = z$ und hiermit $g(z) = f(z)$ oder $g_{(1)}(z)$ ist transzendent. In diesem Fall hat $g_{(1)}(z)$ die Gestalt

$$g_{(1)}(z) = f\{g_{(2)}(z)\}, \qquad g_{(2)}(z) \text{ eine ganze Funktion}, \tag{29'}$$

wobei $f\{g_{(2)}(z)\} = g_{(2)}\{f(z)\}$. Auf diese Weise fortfahrend beweist man, daß entweder

$$g(z) = f_m(z), \qquad m > 0 \text{ ganz}, \tag{30}$$

oder daß es zu jedem ganzen $n>0$ eine transzendente $g_{(n)}(z)$ gibt, so daß

$$g(z) = f_n\{g_{(n)}(z)\}, \quad g_{(n)}\{f(z)\} = f\{g_{(n)}(z)\}. \tag{31}$$

Wir führen die Funktionen $Q_{(n)}(z) = g_{(n)}(z) - g_{(n)}(0)$ und $F_{(n)}(z) = f_n\left(g_{(n)}(0) + z\right)$ ein. Dann ist

$$g(z) = F_{(n)}\{Q_{(n)}(z)\},$$

und

$$Q_{(n)}(0) = 0.$$

Nach PÓLYAs Satz von § 2 ist für jedes $n = 1, 2, \ldots,$

$$M(g, r) > M\left\{F_{(n)}, c\, M\left(Q_{(n)}, \frac{r}{2}\right)\right\} > M\left\{F_{(n)}, c\left(\frac{r}{2}\right)^2\right\} > M(f_n, r)$$

für alle genügend großen r.

Weil der Fall (31) also gegen Satz 7 verstößt, kann nur der Fall (30) eintreten. Damit ist der Satz bewiesen.

Obwohl es ganze Funktionen $f(z)$ gibt, die allein mit den eigenen Iterierten und konstanten Funktionen c mit $f(c) = c$ vertauschbar sind, ist dies sicherlich nicht immer der Fall. Wir kennen schon Beispiele von transzendenten Funktionen $f(z)$, die mit linearen Polynomen vertauschbar sind, und durch Zusammensetzung von diesen Polynomen und den Iterierten von $f(z)$ erhält man weitere mit $f(z)$ vertauschbare Funktionen, die keine Iterierten von $f(z)$ sind. So ist z.B. $z + \sin z$ mit $z + 2k\pi$ vertauschbar $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ und folglich auch mit $(z + 2k\pi) + \sin(z + 2k\pi) = 2k\pi + z + \sin z$.

§ 7. Ein Problem von SZEKERES

In diesem Paragraphen bringen wir die Lösung eines von G. SZEKERES gestellten Problems: *Läßt sich jedem $\alpha \geqq 0$ eine nichtlineare ganze Funktion $f(\alpha, z)$ so zuordnen, daß die $f(\alpha, z)$ eine im Parameter stetige Familie bilden und es gilt*

$$f\{\alpha, f(\beta, z)\} = f(\alpha + \beta, z)?$$

Diese Frage wird durch den Satz 9 beantwortet.

Satz 9. *Es gibt keine Familie von Funktionen $f(\alpha, z)$, $\alpha \geqq 0$, mit den Eigenschaften:*

$$f\{\alpha, f(\beta, z)\} = f(\alpha + \beta, z), \tag{32}$$

$$f(0, z) = z, \tag{32'}$$

$f(\alpha, z)$ *ist für jedes $\alpha > 0$ eine ganze Funktion von z,* (33)

für mindestens ein $\alpha_0 > 0$ ist $f(\alpha_0, z)$ keine lineare Funktion, (34)

und

$$\lim_{\alpha \to 0} f(\alpha, z) = z. \tag{35}$$

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe eine solche Funktionenfamilie. Zuerst sei in (34) $f(\alpha_0, z)$ ein Polynom n-ten Grades, $n>1$. Dann ist $f\left(\frac{\alpha_0}{2}, z\right)$ und allgemein $f\left(\frac{\alpha_0}{2^n}, z\right)$ ein Polynom; denn ist $g(z)$ eine ganze transzendente Funktion, so folgt die Transzendenz von $g\{g(z)\}$ aus dem Picardschen Satz. Man braucht nur die Lösungen der Gleichung $g\{g(z)\}=\text{const}$ zu betrachten. Das Polynom $f\left(\frac{\alpha_0}{2}, z\right)$ hat einen geringeren Grad, $f\left(\frac{\alpha_0}{4}, z\right)$ einen noch geringeren und schließlich $f\left(\frac{\alpha_0}{2^n}, z\right)$ einen Grad $\leqq 1$. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, daß $f(\alpha_0, z)$ einen Grad $n>1$ hat.

Jetzt seien alle $f(\alpha, z)$ transzendent. Jedes $f(\alpha, z)$ hat Fixpunkte; hätte $f(\alpha, z)$ nämlich keinen Fixpunkt, so hätte auch $f\left(\frac{\alpha}{2}, z\right)$ keinen Fixpunkt, und die Funktion

$$\frac{f(\alpha, z)-z}{f\left(\frac{\alpha}{2}, z\right)-z}=\frac{f\left\{\frac{\alpha}{2}, f\left(\frac{\alpha}{2}, z\right)\right\}-z}{f\left(\frac{\alpha}{2}, z\right)-z}$$

wäre eine ganze Funktion, die weder den Wert 0 noch den Wert 1 annimmt. Zu festem $\alpha_0>0$ betrachten wir die Fixpunkte von $f(m\alpha_0, z)$ mit ganzzahligem $m>0$, die innerhalb des Kreises $|z|<R$ liegen. Sie seien mit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ bezeichnet. Für beliebiges $\alpha>0$ ist nach (32) $f(\alpha, z)$ mit $f(m\alpha_0, z)$ vertauschbar; nach § 5 (1) ist $f(\alpha, \xi_i)$, $i=1 \ldots n$, ein Fixpunkt von $f(m\alpha_0, z)$. Nach (35) strebt $f(\alpha, \xi_i)\to\xi_i$ für $\alpha\to 0$; für $\alpha<\delta_i$ ist also $f(\alpha, \xi_i)=\xi_i$ und für geeignetes $\delta(R)>0$ ist $f(\alpha, \xi_i)=\xi_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, für $\alpha<\delta(R)$. Wir nehmen insbesondere $\alpha=\frac{\alpha_0}{2^N}$ und dabei N so groß, daß $\frac{\alpha_0}{2^N}<\delta(R)$. Dann ist

$$f\left(\frac{\alpha_0}{2^N}, \xi_i\right)=\xi_i, \qquad i=1, \ldots, n$$

und daher

$$f(\alpha_0, \xi_i)=\xi_i, \qquad i=1, \ldots, n.$$

Indem wir R beliebig groß wählen, sehen wir, daß jeder Fixpunkt von $f(m\alpha_0, z)$ zugleich Fixpunkt von $f(\alpha_0, z)$ ist. Das Umgekehrte ist ja klar. Dabei ist die ganze Zahl $m>0$ beliebig wählbar; also haben alle $f(m\alpha_0, z)$, $m=1, 2, 3, \ldots$ die gleichen Fixpunkte, die eine isolierte Punktmenge bilden. Damit haben wir einen Widerspruch zu § 5, F.I und F.II hergeleitet und Satz 9 bewiesen.

Wenn man die Forderung (34) fällen läßt, ist Satz 9 nicht gültig. Die stetigen linearen Familien

$$f(\alpha, z)=e^{\alpha b}z+c(e^{\alpha b}-1), \qquad b, c \text{ konst.},$$

und

$$f(\alpha, z)=z+\alpha b, \qquad b \text{ konst.},$$

die sogar einparametrige Transformationsgruppen bilden, sind wohlbekannt.

§ 8. Die Zerlegung einer gegebenen Funktion von endlicher Ordnung in miteinander vertauschbare Funktionen

Jetzt verlassen wir die allgemeineren Fragen von § 5 und § 6 und untersuchen, insbesondere für spätere Anwendung in der Iterationstheorie, das folgende Problem: *Wann läßt eine gegebene ganze Funktion $F(z)$ von endlicher Ordnung eine Zerlegung*

(36) $F(z) = f\{g(z)\}$, $f(z)$, $g(z)$ *ganze transzendente Funktionen,*

und spezieller eine vertauschbare Zerlegung

(37) $F(z) = f\{g(z)\} = g\{f(z)\}$, $f(z)$, $g(z)$ *ganze transzendente Funktionen,*

zu?

Pólya fand durch Anwendung seines in § 2 zitierten Satzes bezüglich (36) das Ergebnis: Entweder ist (a) $g(z)$ ein Polynom und $f(z)$ eine Funktion von endlicher Ordnung, oder (b) $f(z)$ hat die Ordnung 0 und $g(z)$ endliche Ordnung. Im Fall (37) haben also $f(z)$ und $g(z)$ beide die Ordnung 0.

Unter Berücksichtigung von § 4 Satz 3 und Zusatz können wir sofort den Satz aussprechen:

Satz 10. *$F(z)$ lasse die Zerlegung (37) zu und habe endliche Ordnung: dann existiert zu gegebenem $\varepsilon > 0$ eine Folge von geschlossenen Jordan-Kurven Γ_i, die den Nullpunkt im Innern enthalten und außerdem folgende Eigenschaften haben: $\underline{\sigma}_i$ und $\bar{\sigma}_i$ seien die kleinste bzw. größte Entfernung zwischen dem Nullpunkt und Γ_i; dann gilt*

(i) $\underline{\sigma}_i \to \infty$,

(ii) $\bar{\sigma}_i < \underline{\sigma}_i^{1+\varepsilon}$,

(iii) $|F(z)| = |f\{g(z)\}| > \{M(F, \bar{\sigma}_i)\}^{1-\varepsilon}$ für $z \in \Gamma_i$.

Diese sehr starke Bedingung könnte man folgendermaßen formulieren: Das obere Wachstum von $F(z)$ entlang irgendeiner nach ∞ laufenden Kurve ist von der gleichen Größenordnung wie $M(F, r)$. Aus Satz 10 folgt, daß viele bekannten Klassen ganzer Funktionen von endlicher Ordnung keine transzendente Zerlegung (37) zulassen. Offenbar verletzten Funktionen mit einem Zielwert oder Beschränktheitsweg die notwendige Wachstumsbedingung; darunter befinden sich die Funktionen mit einem Picardschen oder Borelschen Ausnahmewert. Eine weitere Klasse bilden die Funktionen F von der genauen endlichen Ordnung ϱ, für die in einem Winkelraum W oder nur auf einer nach ∞ laufenden Kurve Γ

$$F(z) = 0\{\exp(|z|^{\varrho-\delta})\}, \quad \delta > 0,\ z \in W \text{ oder } \Gamma$$

gilt; dazu gehören, wie Bieberbach [24], [25] gezeigt hat, die Funktionen von endlicher Ordnung ϱ, die in einem Winkelraum mit einer größeren

Öffnung als π/ϱ mindestens zwei Werte höchstens endlich oft annehmen oder in irgendeinem Winkelraum schlicht sind.

Als Beispiele für Funktionen, die keine Zerlegung (37) zulassen, hat man e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\frac{1}{\Gamma(-z)}$,

$$F(z) = P\left(z, e^z, e^{e^z}, \ldots, e^{e^{z^m}}\right),$$

wobei $P(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$ ein solches Polynom in $x_1, \ldots, x_{m+1}$ ist, das in x_{m+1} einen nicht verschwindenden Grad hat. Die negative reelle Achse ist ein Beschränktheitsweg für die ersten vier Beispiele, und auf $\arg z = \pi/m$ hat $F(z)$ höchstens die Ordnung $(m-1)$, während die Ordnung von $F(z)$ auf der reellen positiven Achse genau m ist. Besonders interessant sind die Funktionen mit höchstens endlich vielen Fixpunkten, also Funktionen der Form

$$F(z) = z + Q(z)\exp\{R(z)\},\ Q(z),\ R(z) \quad \text{Polynome},$$

die offenbar einen Beschränktheitsweg haben. Diese Funktionen lassen keine Zerlegung (37) zu. ROSENBLOOM [26], [27] hat gezeigt, daß die erweiterte Klasse, die man durch Fallenlassen der Beschränkung auf endliche Ordnung erhält, auch aus lauter unzerlegbaren Funktionen besteht. Zum Beweis braucht man allerdings den zweiten Hauptsatz der meromorphen Funktionen. ROSENBLOOMs Resultat ist das einzige uns bekannte, früher veröffentlichte Ergebnis auf diesem Gebiet, außer ein paar Bemerkungen über das speziellere Problem der Iterierten.

§ 9. Iterationen

Die Iterierten einer ganzen Funktion sind miteinander vertauschbar; wenn $f_m(z)$, $m>0$ ganz, transzendent ist, kann $f(z)$ kein Polynom sein. Durch Umschreiben des Satzes 10 erhält man den

Satz 11. *$F(z)$ sei eine ganze transzendente Funktion von endlicher Ordnung, die eine m-te Iterierte, $m>1$ ganz, ist. Dann hat $F(z)$ die in Satz 10 formulierten Eigenschaften.*

(38) $\qquad f_m(z) = F(z), \qquad F(z)$ eine gegebene ganze Funktion.

Wir bemerken, daß die Gl. (38), falls sie überhaupt von ganzem $f(z)$ zu lösen ist, keineswegs eindeutig lösbar zu sein braucht; z.B. hat

$$f\{f(z)\} = z + \sin z + \sin(z + \sin z)$$

außer der Lösung $f(z) = z + \sin z$ die weiteren Lösungen

$$f^{(k)}(z) = 2k\pi - z - \sin z, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

wie leicht nachzurechnen ist. Beispiele von „Nicht-Iterierten" sind die schon in § 8 erwähnten Funktionenklassen. Die Existenz von Iterierten von endlicher Ordnung ist von BAKER [8] diskutiert worden.

§ 10. Die zweiten Iterierten; die ganzen Lösungen $f(z)$ der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ für ganzes $F(z)$

In diesem Paragraphen werden einige Resultate über die Beschaffenheit von zweiten Iterierten gebracht, wobei die Beschränkung auf endliche Ordnung durch allgemeinere Wachstumsbedingungen ersetzt wird.

Iterieren wir die reelle Funktion $\exp(r^A), A > 0$, so erhalten wir $\exp\{\exp(Ar^A)\}$. Falls $f(z)$ von endlicher Ordnung A ist, so ist also

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\log M[f\{f(z)\}, r]}{\log r} \leqq A. \tag{39}$$

Wir nehmen jetzt an, daß ein solches $f(z)$ vorliegt, so daß (39) gilt. Was können wir dann über das Wachstum von $f(z)$ sagen?

Satz 12. *$f(z)$ sei eine ganze Funktion mit*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\log M[f\{f(z)\}, r]}{\log r} \leqq A, \qquad 0 \leqq A < \infty; \tag{39}$$

dann hat $f(z)$ entweder (i) *die Ordnung $\leqq A$ oder* (ii) *die Ordnung von $f(z)$ ist größer als A und die untere Ordnung $\varrho = 0$, wobei*

$$\underline{\varrho} = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(f, r)}{\log r}.$$

Beweis. Nehmen wir an, die Ordnung von $f(z)$ sei größer als A. Um eine Abschätzung nach unten für $M\{f(f), r\}$ zu erhalten, erinnern wir an den Satz (§ 2) von Pólya. Weil die innere Funktion (um diesen Satz anwenden zu können) im Nullpunkt verschwinden muß, setzen wir

$$f(z) = F(z) + a, \qquad \text{wobei} \qquad a = f(0).$$

Dann ist

$$f\{f(z)\} = F_1\{F(z)\},$$

wobei

$$F_1(z) = f(z + a).$$

Pólyas Satz ergibt

$$M\{f(f), r\} > M\left\{F_1, cM\left(F, \frac{r}{2}\right)\right\}$$

für alle großen r. Es ist nun

$$M(F_1, \varrho) = \operatorname*{Max}_{|z|\leq\varrho} |f(z + a)| \geqq \operatorname*{Max}_{|z|\leq\varrho-|a|} |f(z)| = M(f, \varrho - |a|)$$

für alle $\varrho > |a|$. Also ist

$$\left\{\begin{aligned} M\{f(f), r\} &> M\left\{f, cM\left(F, \tfrac{r}{2}\right) - |a|\right\} \\ &> M\left\{f, cM\left(f, \tfrac{r}{2}\right) - 2|a|\right\} \\ &> M\left\{f, dM\left(f, \tfrac{r}{2}\right)\right\} \end{aligned}\right. \tag{40}$$

für ein geeignetes $0 < d < 1$ und alle genügend großen r.

Weil die Ordnung von $f(z)$ größer als A ist, gibt es eine Folge $\{r_i\}$ mit $r_i \to \infty$, für die

$$d\,M\left(f, \frac{r_i}{2}\right) > d \exp\left\{\left(\frac{r_i}{2}\right)^{A+\varepsilon'}\right\} > \exp\left(r_i^{A+\varepsilon}\right)$$

für genügend kleine, aber sonst beliebig vorgegebene $\varepsilon' > \varepsilon > 0$. Nach (39), (40) ist dann

$$M(f, \exp r_i^{A+\varepsilon}) < M\{f(f), r_i\} < \exp\{\exp r_i^{A+\delta}\} \tag{41}$$

für alle genügend großen r_i, wobei man $0 < \delta < \varepsilon$ annehmen darf. Wir setzen $\exp(r_i^{A+\varepsilon}) = \varrho_i$. Die Ungleichung (41) wird dann zu

$$M(f, \varrho_i) < \exp\exp\left\{(\log \varrho_i)^{\frac{A+\delta}{A+\varepsilon}}\right\}.$$

Es strebt $\log \varrho_i \to \infty$ für $i \to \infty$, und es ist $\frac{A+\delta}{A+\varepsilon} < 1$. Daher ist zu beliebig großem vorgegebenen $L > 0$

$$(\log \varrho_i)^{\frac{A+\delta}{A+\varepsilon}} < \frac{1}{L} \log \varrho_i \qquad \text{für großes } i,$$

und somit

$$M(f, \varrho_i) < \exp\exp\log(\varrho_i^{1/L}) = \exp(\varrho_i^{1/L}).$$

Also ist die untere Ordnung ϱ nicht größer als $1/L$, d.h. $\varrho = 0$.

Zusatz. Setzt man in (39) Gleichheit voraus, so wird der Fall (i) zu (i'): die Ordnung von $f(z)$ ist gleich A, oder es gilt (ii).

Auf Grund des Satzes 12 kann man verschiedene Sätze über die zweite Iterierte herleiten.

Satz 13. *Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion, für die die Ungleichung (39) erfüllt ist. Dann kann die zweite Iterierte $g(z) = f\{f(z)\}$ höchstens $2[2A]$ numeisch verschiedene endliche Zielwerte haben.*

Hierbei bedeutet $[2A]$ die größte ganze Zahl $m \leq 2A$.

Beweis. $g(z)$ habe die n numerisch verschiedenen Zielwerte c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; d.h. es gebe stetige, nach unendlich laufende Kurven Γ_i: $z = z_i(t)$, $0 \leq t < 1$, $i = 1, \ldots, n$, so daß

$$\lim_{t \to 1} |z_i(t)| = \infty$$

$$\lim_{t \to 1} g\{z_i(t)\} = c.$$

Bei der Abbildung $z \to f(z)$ entsteht das Bild $f(\Gamma_i)$ von Γ_i; dieses Bild ist auch eine stetige Kurve, und zwar mit demselben Parameter t wie in Γ_i:

$$f(\Gamma_i): \quad f\{z_i(t)\}, \qquad 0 \leq t < 1.$$

Es ergibt sich die Frage: Wie verhält sich $f\{z_i(t)\}$ für $t \to 1$?

Entweder hat $f(\Gamma_i)$ (i) keinen Häufungspunkt im Endlichen, läuft also nach Unendlich oder (ii) $f(\Gamma_i)$ hat wenigstens einen endlichen Häufungs-

punkt α_i. Aus $f\{f(z)\} = g(z)$ folgt, daß $f(\alpha_i) = c_i$ und daß $f(\Gamma_i)$ nur isolierte Häufungspunkte hat. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ können wir um α_i einen Kreis $K(\delta)$: $|z - \alpha_i| \leq \delta$ finden, auf dessen Peripherie $|f(z) - f(\alpha_i)| = |f(z) - c_i| > \varepsilon$ ist. Innerhalb von $K(\delta)$ liegen Punkte $f\{z_i(t)\}$ von $f(\Gamma_i)$, für die t beliebig nahe bei 1 liegt und $|g\{z_i(t)\} - c_i| < \varepsilon$ ist. Weil für alle genügend großen t $|f\{f(z_i(t))\} - c_i| < \varepsilon$ ist, kann die Kurve $f(\Gamma_i)$ von einem gewissen t ab den Kreis $K(\delta)$ nicht mehr verlassen. Es gibt also ein $t(\delta)$, so daß $|f\{z_i(t)\} - \alpha_i| < \delta$ für $t(\delta) < t < 1$. Wenn man ε beliebig klein wählt, darf man δ auch beliebig klein wählen. Also ist im Fall (ii) $\lim_{t \to 1} f\{z_i(t)\} = \alpha_i$, d.h. $f(z)$ hat auf Γ_i den Zielwert α_i.

Wenn Fall (i) eintritt, hat $f(z)$ auf $f(\Gamma_i)$ den Zielwert c_i. Tritt für Γ_i und Γ_j, $i \neq j$, der Fall (i) ein, so wissen wir schon, daß $c_i \neq c_j$; tritt für beide der Fall (ii) ein, so entsprechen den Wegen Γ_i bzw. Γ_j die Zielwerte α_i bzw. α_j von $f(z)$, die wegen $f(\alpha_i) = c_i \neq c_j = f(\alpha_j)$ numerisch verschieden sind. Jedem Zielwert c_i, $i = 1, \ldots, n$, von $g(z)$ läßt sich also ein Zielwert von $f(z)$ zuordnen. Ist $n \geq 2[2A] + 1$, so tritt einer der Fälle (i), (ii) mindestens $([2A] + 1)$-mal ein. Dann hat $f(z)$ mindestens $[2A] + 1$, also mehr als $2A$ numerisch verschiedene Zielwerte. Nach dem Satz von Denjoy-Carleman ist dann die Ordnung von $f(z)$ größer als A und nach Satz 12 hat $f(z)$ die untere Ordnung 0. Carleman (vgl. [*28*, S. 145]) hat bewiesen, daß eine ganze Funktion von unterer Ordnung 0 keinen Beschränktheitsweg (also a fortiori keinen Zielwert) hat. Aus diesem Widerspruch folgern wir die Behauptung des Satzes.

Bemerkung. Zwei Zielwerte α_1 bzw. α_2 von $f(z)$ mit den zugehörigen Wegen Γ_1 bzw. Γ_2 sind sicher „verschieden", wenn $\alpha_1 \neq \alpha_2$; in der Theorie der ganzen Funktionen (z.B. für die Anwendung des Denjoy-Carlemanschen Satzes) sind sie auch dann als verschieden zu betrachten, wenn $\alpha_1 = \alpha_2$ ist und zwischen Γ_1 und Γ_2 ein nach ∞ laufender Weg liegt, auf dem $f(z)$ nach ∞ strebt. Wir haben die numerische Verschiedenheit der Zielwerte von $g(z)$ vorausgesetzt, um die numerische Verschiedenheit (und damit die Verschiedenheit „im erweiterten Sinne") genügend vieler Zielwerte von $f(z)$ zu erzwingen. Auf diese Weise umgeht man eine Untersuchung über die Lage der Kurven Γ_i und $f(\Gamma_i)$ und über ihre gegenseitigen Beziehungen.

Satz 13 ist schon dann nicht mehr gültig, wenn die Zielwerte verschieden im erweiterten Sinne, aber numerisch gleich sind. Die Funktion $g(z) = \exp(\exp z)$ erfüllt (39) mit $A = 1$; auf den Halbstrahlen $y = (2n+1)\pi$, $x = t$, $0 \leq t < \infty$ hat $g(z)$ die Zielwerte 0; zwischen diesen Halbstrahlen liegen die Halbstrahlen $y = 2n\pi$, $x = t$, $0 \leq t < \infty$; auf denen $g(z)$ nach ∞ strebt. Also hat $g(z)$ sogar unendliche viele Zielwerte im erweiterten Sinne.

Einen ähnlichen Satz können wir beweisen, wenn wir nicht die Zielwerte, sondern die Winkelräume berücksichtigen, in denen eine ganze Funktion mindestens zwei Werte höchstens endlich oft annimmt. Die maximale Größe solcher Winkelräume steht im Zusammenhang mit der Ordnung der Funktion. Bieberbach [*25*] hat bewiesen:

B.1. *Wenn die ganze Funktion $f(z)$ in einem Winkelraum W der Öffnung $\alpha\pi$ zwei verschiedene Werte höchstens endlich oft annimmt, so gilt in jedem Teilwinkelraum von W*

$$f(z) = O\left(\exp\{K|z|^{1/\alpha}\}\right)$$

für geeignetes $K > 0$.

B.2. *Jede ganze Funktion der Ordnung ϱ nimmt für $\frac{1}{2} \leqq \varrho \leqq 1$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung π/ϱ übersteigt, für $\varrho \geqq 1$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung $\pi\left(2 - \frac{1}{\varrho}\right)$ übersteigt, alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.*

Unter Verwendung dieser Ergebnisse folgt der

Satz 14. *Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion für die*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\log M\{f(f), r\}}{\log r} = A \geqq \frac{1}{2} \tag{42}$$

erfüllt ist; dann nimmt die zweite Iterierte $f\{f(z)\}$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung für $\frac{1}{2} \leqq A \leqq 1$ den Wert $\frac{\pi}{A}$ und für $A \geqq 1$ den Wert $\pi\left(2 - \frac{1}{A}\right)$ übersteigt, alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.

Beweis. Durch die Forderung (42) werden Polynome ausgeschlossen; $f(z)$ ist transzendent. W sei ein Winkelraum, in dem $f\{f(z)\}$ die beiden Werte α und β $(\alpha \neq \beta)$ höchstens endlich oft annimmt. Es seien ξ_i die (in der ganzen Ebene, ohne Beschränkung auf W, gelegenen) Wurzeln von $f(z) = \alpha$ oder von $f(z) = \beta$. Es gibt abzählbar unendlich viele ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$. Es seien z_{ij} die in W gelegenen Wurzeln von $f(z) = \xi_i$. Dann hat $f\{f(z_{ij})\} = f(\xi_i)$ entweder den Wert α oder β; also gibt es überhaupt nur endliche viele z_{ij}. Man kann zwei — und sogar unendliche viele — ξ_i finden, so daß $f(z) = \xi_i$ keine Wurzeln in W hat.

Nehmen wir an, daß die Öffnung Θ von W folgende Ungleichung erfüllt:

$$\begin{cases} \Theta > \dfrac{\pi}{A} & \text{für } \dfrac{1}{2} \leqq A \leqq 1 \\ \Theta > \pi\left(2 - \dfrac{1}{A}\right) & \text{für } A \geqq 1. \end{cases} \tag{43}$$

Dann folgt aus B.1, daß $f(z)$ in jedem Teilwinkelraum V von W eine Ordnung ϱ kleiner als A hat. Wir wählen V so, daß die Öffnung Φ von V ebenfalls (43) erfüllt. Es ist unmöglich, daß $f(z)$ eine untere Ordnung $\underline{\varrho}$ mit $\underline{\varrho} = 0$ hat:

(i) $\frac{1}{2} \leqq A \leqq 1$. In V ist die Ordnung von $f(z)$ nicht größer als

$$\frac{\pi}{\Theta} < A - 2\delta < A, \quad 0 < \delta < \frac{A}{2}.$$

Nehmen wir an, V sei der Winkelraum:

$$0 < |z| < \infty, \quad \pi - \frac{\Phi}{2} \leqq \arg z \leqq \pi + \frac{\Phi}{2}.$$

Auf dem Rand von V ist für die Funktion

$$F(z) = f(z)\exp(-z^{A-\delta})$$

die Ungleichung

$$|F(r e^{i(\pi\pm\Phi/2)})| < \exp\left\{r^{A-2\delta} - r^{A-\delta}\cos\left[(A-\delta)\left(\pi-\frac{\Phi}{2}\right)\right]\right\}$$

für alle genügend großen r. Dies ist aber beschränkt, weil $0<(A-\delta)\left(\pi-\frac{\Phi}{2}\right)<\frac{\pi}{2}$. Also ist $F(z)$ auf dem Rand von V beschränkt.

Ist $\underline{\varrho}=0$, so gibt es $r_i\to\infty$, so daß

$$|f(r_i e^{i\alpha})| < \exp(r_i^{\varepsilon}), \qquad 0\leqq\alpha\leqq 2\pi,$$

für $0<\varepsilon<A-\delta$. Auf

$$|z| = r_i, \qquad -\pi+\frac{\Phi}{2}\leqq\arg z\leqq\pi-\frac{\Phi}{2}$$

ist

$$|F(z)| < \exp\left\{r_i^{\varepsilon} - r_i^{A-\delta}\cos\left[(A-\delta)\left(\pi-\frac{\Phi}{2}\right)\right]\right\} < K,$$

daher gleichmäßig beschränkt in i. Anwendung des Maximumsprinzips zeigt, daß $F(z)$ im ganzen Winkelraum

$$-\pi+\frac{\Phi}{2}\leqq\arg z\leqq\pi-\frac{\Phi}{2}$$

beschränkt ist:

$$|F(z)| < K'$$

und damit

$$|f(z)| < K'|\exp(z^{A-\delta})| < K'\exp(|z|^{A-\delta})$$

im zu V komplementären Winkelraum.

Die Ordnung von $f(z)$ ist also in der ganzen Ebene kleiner als A, was mit (42) nicht verträglich ist. Folglich ist $\underline{\varrho}>0$.

(ii) $A>1$. Der Beweis läuft ganz analog zum Fall (i). Weil $\underline{\varrho}>0$ ist, kommt in Satz 12 und Zusatz nur der Fall (i) vor und $f(z)$ hat die Ordnung A. Nach B.2 ist diese Behauptung mit der Ungleichung (43) nicht verträglich. Der Satz 14 ist bewiesen.

Ein anderer Satz dieser Art folgt aus weiteren Untersuchungen von Bieberbach [24]:

B.3. *Wenn die ganze Funktion $f(z)$ einen Winkelraum der Öffnung $\alpha\pi$ schlicht abbilden soll, so muß in jedem inneren Teilraum*

$$f(z) = O\left(|z|^{2/\alpha}\right)$$

sein.

B.4. *Eine ganze transzendente Funktion der Ordnung ϱ ist in keinem Winkelraum, dessen Öffnung $\pi\left(2-\frac{1}{\varrho}\right)$ übersteigt, schlicht (falls $\varrho\leqq\frac{1}{2}$, also in überhaupt keinem Winkelraum).*

Wir beweisen den

Satz 15. *$f(z)$ sei eine ganze Funktion, so daß*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\log M\{f(f),r\}}{\log r} = A > 0 \tag{44}$$

erfüllt ist; dann ist die zweite Iterierte $f\{f(z)\}$ in keinem Winkelraum schlicht, dessen Öffnung den Wert $\pi\left(2-\frac{1}{A}\right)$ übersteigt.

Beweis. Wegen (44) kommen Polynome nicht in Frage. W sei ein Winkelraum, in dem $f\{f(z)\}$ schlicht ist. $f(z)$ ist in W schlicht. Denn sonst würde es $\alpha, \beta \in W$, $\alpha \neq \beta$ geben, für die $f(\alpha) = f(\beta)$; dann würde die Gleichung $f\{f(\alpha)\} = f\{f(\beta)\}$ folgen, entgegen der Schlichtheit von $f\{f(z)\}$. Nehmen wir an, daß die Öffnung Θ von W den Wert $\pi\left(2-\frac{1}{A}\right)$ übersteigt. Aus B.3 folgt, daß $f(z)$ in W durch eine $|z|$-Potenz beschränkt ist, und wie in Satz 14 erkennt man, daß die untere Ordnung von $f(z)$ größer als 0 ist. Aus Satz 12 folgt, daß $f(z)$ die Ordnung A hat. Das ist aber (nach B.4) ein Widerspruch zur Annahme $\Theta > \pi\left(2-\frac{1}{A}\right)$ und Satz 15 ist bewiesen.

Bemerkung. Die Sätze 13, 14 und 15 lassen sich auch als Sätze über die Lösbarkeit der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ [$F(z)$ ganz, vorgegeben] aussprechen.

§ 11. Die lokalen Lösungen der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ für ganzes $F(z)$

Wir haben gesehen, daß, falls $F(z)$ nicht gewisse notwendige Bedingungen erfüllt, die Gleichung

$$f\{f(z)\} = F(z), \quad F(z) \text{ ganz}, \tag{45}$$

keine ganze Lösung $f(z)$ hat. Dann können trotzdem verschiedene nicht ganze Lösungen vorkommen: z.B. wenn

$$F(z) = \xi + b_1(z-\xi) + b_2(z-\xi)^2 + \cdots \tag{46}$$

mit $b_1 \neq 0$ und b_1 keine Einheitswurzel ist, gibt es genau zwei formale Reihen

$$f(z) = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)}(z-\xi)^n, \qquad i = 1, 2, \tag{47}$$

die bei formalem Einsetzen die Gl. (45) befriedigen. Es kann sogar gezeigt werden, daß diese Reihen einen positiven Konvergenzradius haben (im allgemeinen aber kleiner als ∞), falls $|b_1| \neq 0, 1$. Der Fall, wo $F(z)$ einen Fixpunkt ξ hat, aber $b_1 = F'(\xi)$ eine Einheitswurzel ist, ist wesentlich schwieriger zu behandeln. Ein spezielles Beispiel wird am Ende dieses Paragraphen auftreten.

In [8, Theorem 3] haben wir den Satz aufgestellt:

$f(z)$ sei eine analytische (lokale) Lösung von (45), *analytisch in einem Punkt $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$ und im Fatouschen Ausnahmewert, wenn ein solcher existiert; $F(z)$ habe einen Beschränktheitsweg. Dann ist $f(z)$ keine eindeutige Funktion.* Weil der Begriff „eindeutige analytische Lösung von (45)" in [8] nicht richtig definiert wurde, bringen wir hier den genauer formulierten Satz 16 ähnlichen Inhalts.

Definition. Eine eindeutige analytische Lösung von $f(z)$ von (45) *ist eine in ihrem schlichten Existenzgebiet D eindeutige Funktion, die auch eine lokale Lösung von* (45) *im folgenden Sinne ist: Es gibt ein $z_0 \in D$ und einen in D gelegenen Kreis K:*

$$|z - z_0| < \delta, \qquad \delta > 0,$$

so daß $f(z) \in D$ und (45) *für jedes $z \in K$ gelten.*

Satz 16. *$F(z)$ sei eine solche ganze Funktion, daß* (45) *keine ganze Lösung hat; dann hat* (45) *keine eindeutige analytische Lösung, die in einem Punkt von $\mathfrak{F}(F)$ und im Fatouschen Ausnahmewert (falls dieser existiert) regulär ist.*

Beweis. Wir nehmen an, daß es unter den Bedingungen des Satzes doch eine eindeutige analytische Lösung $f(z)$ gibt. Dann zeigen wir

(i) $f(D) \subset D$. z_0 habe die gleiche Bedeutung wie in der obigen Definition; also ist $f(z_0) \in D$. Es sei z_1 ein solcher Punkt, daß $f(z_1) \in D$. Wir verbinden z_0 mit z_1 mittels einer stetigen doppelpunktfreien Kurve $\Gamma \subset D$, und es sei p der erste Punkt von Γ (das so orientiert ist, daß z_0 vor z_1 liegt), für den $f(p) \notin D$. Offenbar ist $p \neq z_0$. γ sei der zwischen z_0 und p liegende Teil von Γ; also ist $f(\gamma)$ eine Kurve, die mit Ausnahme des Endpunktes $f(p)$ ganz in D liegt. Für $z \in \gamma$, $z \neq p$ haben wir dann gleichzeitig $f(z) \in D$ und (45). Mittels (45) können wir $f(z)$ über den Punkt $f(p)$ hinaus analytisch fortsetzen: Die Entwicklung

$$f(z) = f(p) + \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-p)^n \qquad \text{mit } a_k \neq 0$$

konvergiert und daher auch die inverse Reihe

$$z = f_{-1}(w) = p + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \{w - f(p)\}^{n/k}, \tag{48}$$

für die $f\{f_{-1}(w)\} = w$ ist. Wir bilden den Ausdruck

$$f^*(w) = F\{f_{-1}(w)\},$$

der um $w = f(p)$ eine konvergente Entwicklung hat:

$$f^*(w) = F(p) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \{w - f(p)\}^{n/k}. \tag{49}$$

Ein Zweig von (48) bildet aber $f(\gamma)$ — wenigstens in einer Umgebung des Punktes $f(p)$, wo (48) und (49) konvergieren — auf einen Teil von γ ab. Für

diese Punkte $f(\gamma)$ hat man

$$f^*(w) = F\{f_{-1}(w)\} = f[f\{f_{-1}(w)\}],$$

weil (45) auf γ gilt; also $f^*(w) = f(w)$ auf einem Segment von $f(\gamma)$. Damit ist (49) ein Element des analytischen Gebildes von $f(z)$, und weil $f(z)$ nach Voraussetzung eindeutig ist, ist $k = 1$. Also ist nach (49) $f(p) \in D$, entgegen $f(p) \notin D$, und daher ist (i) bewiesen.

(ii) Weil $f(D) \subset D$ gilt, ist $f\{f(z)\} = F(z)$ für jedes $z \in D$. Dann ist $F(D) = f\{f(D)\} \subset D$ und sogar $F_m(D) \subset D$ für jede natürliche Zahl m. Es wurde angenommen, daß das (offene) Gebiet D einen Punkt von $\mathfrak{F}(f)$ und damit einen Kreis C um diesen Punkt als Zentrum enthält. Nach den oben zitierten Resultaten von FATOU (§ 5, F. III) enthält also $D \supset F_m(D) \supset F_m(C)$ für genügend großes m ein beliebiges beschränktes Gebiet, eventuell mit einer Ausnahme einer kleinen Umgebung des Ausnahmewertes. Auch im Ausnahmewert ist $f(z)$ regulär, also regulär in jedem beschränkten Gebiet; d.h. $f(z)$ ist ganz, im Widerspruch zur Voraussetzung, und der Satz ist bewiesen.

Besonders interessant unter den lokalen Lösungen sind diejenigen, die man aus dem Fixpunktansatz (46), (47) erhält. Im allgemeinen kann man dort die Koeffizienten a_n rekursiv bestimmen. Wenn man etwas über die Eigenschaften von $F(z)$ weiß, ist es ein interessantes Problem, aus diesen Kenntnissen eine Abschätzung für den Konvergenzradius der Entwicklung (47) zu gewinnen. Hierbei sind allgemeine funktionentheoretische Methoden sehr erwünscht, weil die Koeffizientenrekursion für die a_n unübersichtlich ist. Wir behandeln ein ziemlich spezielles Problem, das THRON, CHOWLA, KEMPNER und RIVLIN (vgl. [9]) aufgeworfen haben.

$$f\{f(z)\} = e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \tag{50}$$

hat genau eine formale Reihenlösung der Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

nämlich

$$f(z) = z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{48} + \cdots \tag{51}$$

wie man durch eine leichte Rechnung bestätigt. Die Berechnung der Koeffizienten a_n ist aber recht kompliziert und ihre Größe ist von vornherein gar nicht klar. Was ist der Konvergenzradius ϱ von (51)? THRON [9] erwähnt seine Vermutung $\varrho = 0$ und beweist, daß es keine ganze Lösung von (50) gibt.

Soviel folgt sofort aus unserem Satz 8 oder Satz 11. Wir schließen unsere Arbeit mit dem folgenden Ergebnis ab:

Satz 17. *Es sei $F(z) = e^z - 1$; für jedes relle σ sei $F_\sigma(z)$ die durch*

$$F\{F_\sigma(z)\} = F_\sigma\{F(z)\} \tag{52}$$

eindeutig bestimmte formale Reihe der Form

$$F_\sigma(z) = z + \frac{\sigma}{2} z^2 + \sum_{m=3}^{\infty} a_m(\sigma)\, z^m. \tag{53}$$

$F_\sigma(z)$ hat einen positiven Konvergenzradius genau dann, wenn σ eine ganze Zahl ist. Für ganzes $\sigma = n > 0$ ist $F_\sigma(z)$ die n-te Iterierte von $F(z)$, also eine ganze Funktion; für ganzes $\sigma = n < 0$ ergibt $F_\sigma(z)$ die inverse Reihenentwicklung zu $F_{-n}(z)$.

Throns Vermutung bildet den Fall $\sigma = \frac{1}{2}$.

Wir schicken voraus den einfachen

Hilfssatz 5. *z_0 sei eine feste Zahl für die* $\operatorname{Re} z_0 \geqq 0$ *und $z_0 \neq 0$ gelten; dann liegt der Hauptwert* $\log(1+z_0)$ *im Halbkreis* $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| < |z_0|$.

Beweis.

$$|\log(1+z_0)| = \left| \int_0^{z_0} \frac{dt}{1+t} \right| < \int_0^{z_0} d|t| = |z_0|,$$

wenn man längs der Strecke $\arg t - \arg z_0$ integriert. Andererseits gilt

$$\operatorname{Re} \log(1+z_0) = \log|1+z_0| > 0.$$

Beweis von Satz 17. Die Eindeutigkeit und Existenz von $F_\sigma(z)$ ergibt sich leicht durch formale Rechnung; es zeigt sich, daß die $a_m(\sigma)$ in (53) reell sind. Die Behauptung über ganzzahlige σ-Werte folgt sofort aus der Eindeutigkeit von $F_\sigma(z)$, wenn man die Iterierten von $F(z)$ im Nullpunkt entwickelt. Es bleibt der Fall von nicht-ganzen σ zu betrachten.

Konvergiert $F_\sigma(z)$ in $|z| < \varrho$, $\varrho > 0$, so konvergiert die inverse Reihe $G_\sigma(z)$ zu $F_\sigma(z)$ in $|z| < \varrho'$, $\varrho' > 0$. $F_\sigma(z)$ erfüllt (52) nicht nur als formale Potenzreihe für eine Umgebung von $z = 0$; hieraus folgt

$$F\{G_\sigma(z)\} = G_\sigma\{F(z)\}.$$

$G_\sigma(z)$ hat die Entwicklung

$$G_\sigma(z) = z - \frac{\sigma}{2} z^2 + O(z^3).$$

Daher ist $G_\sigma(z) = F_{-\sigma}(z)$ und $F_{-\sigma}(z)$ konvergiert in $|z| < \varrho'$. Es genügt also die Behauptung des Satzes für $\sigma > 0$, σ nicht ganz, zu beweisen. Zuerst ist klar, daß $F_\sigma(z)$ keine ganze Funktion ist, denn nach Satz 8 sind $F_n(z)$, $n > 0$ ganz, die einzigen mit $F(z)$ vertauschbaren ganzen Funktionen. Der Konvergenzradius von $F_\sigma(z)$ sei ϱ. Die Annahme $\varrho > 0$ führt auf einen Widerspruch:

Es sei $\varrho > 0$. (i) Dann hindert keine Singularität die Fortsetzung von (53) in der Halbebene $\operatorname{Re} z \geqq 0$; denn sonst gäbe es ein kleinstes $r \geqq 0$, zu dem eine singuläre Stelle z_0: $\operatorname{Re} z_0 \geqq 0$, $|z_0| = r$ existiert. Nach Hilfssatz 5 ist der Hauptwert von $\log(1+z_0)$ ein regulärer Punkt von $F_\sigma(z)$. Die Funktion

$$\Phi(z) = F[F_\sigma\{\log(1+z)\}] = F[F_\sigma\{F_{-1}(z)\}]$$

stimmt in einer Umgebung des Nullpunktes mit $F_\sigma(z)$ überein und gewährt eine reguläre Fortsetzung von $F_\sigma(z)$ über z_0 hinaus. Dabei verstehen wir (wie im ganzen Verlauf des Beweises) unter $\log(1+z)$ den in der aufgeschlitzten Ebene $z \neq re^{i\pi}$, $r \geq 1$, regulären Zweig, der im Nullpunkt verschwindet.

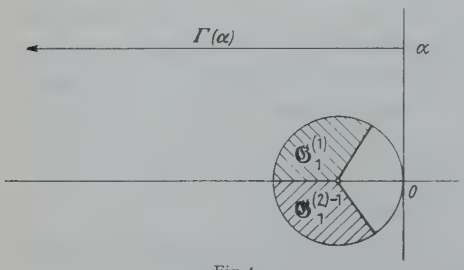

Fig. 1

(ii) $z \to F(z)$ bildet $\operatorname{Re} z \geq 0$ auf das Äußere und den Rand des Kreises $|z+1| \geq 1$ ab. Schneiden wir die Ebene von $-\infty$ bis -2 längs der reellen Achse auf. Dann können wir wieder $F_\sigma(z)$ mittels $\Phi(z)$ in das aufgeschlitzte Gebiet $|z+1| \geq 1$; $z \neq re^{i\pi}$, $2 \leq r < \infty$, eindeutig fortsetzen.

(iii) Wir nehmen zu α, $-\pi < \alpha \leq -1$ oder $1 \leq \alpha < \pi$ einen Weg $\Gamma(\alpha)$

$$\left\{\begin{array}{ll} \Gamma(\alpha): & 0+i\tau, \quad 0 \leq \tau \leq \alpha \\ & \sigma+i\alpha, \quad 0 \geq \sigma > -\infty \end{array}\right\} \quad \text{für } 1 \leq \alpha < \pi, \tag{52}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \Gamma(\alpha): & 0+i\tau, \quad 0 \geq \tau \geq \alpha \\ & \sigma+i\alpha, \quad 0 \geq \sigma > -\infty \end{array}\right\} \quad \text{für } -\pi < \alpha \leq -1. \tag{53}$$

$z \to F(z)$ bildet $\Gamma(\alpha)$ auf einen Weg ab, der vom Nullpunkt bis zum Winkel α auf dem Kreisrand $|z+1|=1$ und dann radial gegen -1 läuft. Auf diese Weise wird $F_\sigma(z)$ durch $\Phi(z)$ in die Gebiete

$$\mathfrak{G}_1^{(1)}: \quad -1+re^{i\Theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad 1 \leq \Theta < \pi,$$

und

$$\mathfrak{G}_1^{(2)}: \quad -1+re^{i\Theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad -\pi < \Theta \leq -1,$$

fortgesetzt.

Man nimmt nun weitere Wege $\Gamma(\alpha)$: (52) bzw. (53) mit $\sin 1 \leq \alpha < 1$ bzw. $-1 < \alpha \leq \sin(-1)$ und erhält eine entsprechende Fortsetzung von $F_\sigma(z)$ in die Gebiete

$$\mathfrak{G}_2^{(1)}: \quad -1+re^{i\Theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad \sin 1 \leq \Theta < 1,$$

und

$$\mathfrak{G}_2^{(2)}: \quad -1+re^{i\Theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad -1 < \Theta \leq -\sin 1.$$

Nach n soichen Schritten kommt man zu zwei Gebieten $\mathfrak{G}_n^{(1)}$, $\mathfrak{G}_n^{(2)}$ der Form:

$$\mathfrak{G}_n^{(1)}: \quad -1+re^{i\Theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad \sin_{(n-1)}(1) \leq \Theta < \sin_{(n-2)}(1),$$

$$\mathfrak{G}_n^{(2)}: \quad -1+re^{i\Theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad -\sin_{(n-2)}(1) < \Theta \leq -\sin_{(n-1)}(1),$$

wobei $\sin_{(n)} z$ die n-te Iterierte von $\sin z$ ist. Für $n \to \infty$ ist nun $\sin_n 1$ eine monoton abnehmende Folge von positiven Zahlen und hat einen limes γ, für den $\sin\gamma = \gamma$. Also strebt $\sin_n 1 \to 0$.

Wir sehen, daß wir $F_\sigma(z)$ überall in die Ebene fortsetzen können, wenn wir die reelle Achse von $-\infty$ bis 0 wegnehmen. Auf dem Konvergenzkreis $|z| = \varrho$ liegt mindestens eine singuläre Stelle von $F_\sigma(z)$, also ist diese eindeutig, und zwar der Punkt $-\varrho$. Daraus leiten wir jetzt einen Widerspruch her. Für $-\varrho < x$ ist $F_\sigma(x)$ reell, weil alle a_n reell sind, und für $-\varrho < x < 0$ ist

$F_\sigma(x)>x$. Denn es ist $F_\sigma(0)=0$, und für kleine negative x ist $F_\sigma(x)>x$; wenn $F_\sigma(x_0)\leqq x_0$, $-\varrho<x_0<0$, so wäre $F_\sigma(x_1)=x_1$ für ein $x_0\leqq x_1<0$, und wenn x_1 der größte solche Wert ist [also $F_\sigma(x)>x$ für $x_1\leqq x\leqq 0$], so ist $F_\sigma\big(F(x_1)\big)=F\big(F_\sigma(x_1)\big)=F(x_1)$. Aber es gilt $x_1<F(x_1)<0$, entgegen der Definition von x_1. Also gilt $F_\sigma(x)>x$ für $x>-\varrho$. Nun gilt $F(-\varrho)>-\varrho$, so daß sich $F_\sigma\{F(z)\}$ regulär in $-\varrho$ verhält und außerdem ist $F_\sigma\big(F(-\varrho)\big)>F(-\varrho)>-1$. Also gibt $\Psi(x)=F_1[F_\sigma\{F(x)\}]$ eine reguläre Fortsetzung von $F_\sigma(x)$ längs der negativen reellen Achse von 0 bis $-\varrho$ und liefert eine reguläre Entwicklung im Punkt $-\varrho$. Dann wäre aber jeder Punkt des Konvergenzkreises eine reguläre Stelle. Die Annahme $\varrho>0$ ist also falsch.

Literatur

[1] Schröder, E.: Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Math. Ann. **2**, 317–365 (1870). — [2] Schröder, E.: Über iterierte Funktionen. Math. Ann. **3**, 296–322 (1871). — [3] Koenigs, G.: Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionelles. Annales sci. de l'Ecole Normale Supérieure (3), Suppl., (1884), 3–41. — [4] Julia, G.: Mémoire sur l'itération des fonctions rationelles. J. Math. **8**, 1 (1918). — [5] Fatou, P.: Sur les équations fonctionelles. Bull. Soc. Math. France **47**, 161–271 (1919); **48**, 33–94, 208–314 (1920). — [6] Fatou, P.: Sur l'itération des fonctions transcendantes entières. Acta math. **47**, 337–370 (1926). — [7] Bödewadt, U. T.: Zur Iteration reeller Funktionen. Math. Z. **49**, 497–516 (1943–1944). — [8] Baker, I. N.: The iteration of entire transcendental functions and the solution of the functional equation $f\{f(z)\}=F(z)$. Math. Ann. **129**, 174–180 (1955). — [9] Thron, W. J.: Entire solutions of a functional equation. Canadian J. Math. **8**, 47–48 (1956). — [10] Pólya, G.: On an integral function of an integral function. J. London Math. Soc. **1**, 12–15 (1926). — [11] Littlewood, J. E.: A General Theorem on integral functions of finite order. Proc. London Math. Soc. (2) **6**, 189–204 (1908). — [12] Wiman, A.: Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe Null. Math. Ann. **76**, 197–211 (1915). — [13] Amirà, B.: Sur un théorème de M. Wiman dans la théorie des fonctions entières. Math. Z. **22**, 206–221 (1925). — [14] Besicovitch, A. S.: On integral functions of order <1. Math. Ann. **97**, 677–695 (1927). — [15] Cartwright, M. L.: On the minimum modulus of integral functions. Proc. Cambridge Phil. Soc. **30**, 412–420 (1934). — [16] Pennycuick, K.: On a theorem of Besicovitch. J. London Math. Soc. **10**, 210–212 (1935). — [17] Titchmarsh, E. C.: The theory of functions, 2nd edit. Oxford 1939. — [18] Ritt, J. F.: On the iteration of rational functions. Trans. Amer. Math. Soc. **21**, 348–356 (1920). — [19] Ritt, J. F.: Prime und composite polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **23**, 51–66 (1922). — [20] Jacobsthal, E.: Über vertauschbare Polynome. Math. Z. **63**, 243–276 (1955). — [21] Julia, G.: Mémoire sur la permutabilité des fractions rationelles. Annales sci. de l'Ecole Normale Supérieure (3) **39**, 131–215 (1922). — [22] Bohr, H.: Über einen Satz von Edmund Landau. Scripta Univ. atque Bibl. Hierosolymitanarum **1**, Nr. 2 (1923). — [23] Polya, G., u. G. Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Bd. 2. Berlin 1925. — [24] Bieberbach, L.: Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen. Math. Z. **2**, 158–170 (1918). — [25] Bieberbach, L.: Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Math. Z. **3**, 175–190 (1919). — [26] Rosenbloom, P.: L'itération des fonctions entières. C. R. Acad. Sci. Paris **227**, 382–383 (1948). — [27] Rosenbloom, P.: The fix-points of entire functions. Medd. Lunds Univ. mat. Sem., Suppl.-Bd. M. Riesz 186–192 (1952). — [28] Valiron, G.: Lectures on the general theory of integral functions. Toulouse 1923.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. August 1957)

NEUMANN, B. H.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 164–172 (1958)

Ascending Verbal and Frattini Series

Dedicated to FRIEDRICH LEVI for his 70th birthday, 6 February 1958

By

B. H. NEUMANN

§ 1. Introduction

Let f be a function that assigns to every group G a certain subgroup

$$f(G) \leqq G. \tag{1.1}$$

Then we are led, by iteration of the function, to *descending f-series*

$$G_0 \geqq G_1 \geqq G_2 \geqq \cdots, \qquad G_{i+1} = f(G_i);$$

and we can also define, dually, the *ascending f-series*

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots, \qquad G_i = f(G_{i-1}).$$

The well-known (descending) *derived series* is obtained in this way by taking as $f(G)$ the derived (or commutator) group G' of G; the dual notion of *ascending derived series* was introduced and studied recently [*10*]. Some other well-known series, such as the lower (or descending) and upper (or ascending) central series are not of the type here considered.

A descending f-series can be continued indefinitely; but it may be ultimately stationary, that is, it may happen that $G_n = G_{n+1}$, and then all further terms are the same. This is the case in particular if the trivial group $\{1\}$ is reached after a finite number of steps — as for example in the descending derived series of soluble groups.

On the other hand if in an ascending f-series one of the inclusions is proper, then all further inclusions are proper, and the series can not become stationary; but it can break off, that is to say, it can lead to a group G_n which is not of the form $f(H)$ for any group H.

Criteria for this to happen were given for ascending derived series in [*10*]. These criteria will here be extended to other ascending f-series, using mostly straightforward applications or generalizations of the methods of [*10*]. Two kinds of functions f are here defined and considered, leading to what we call *ascending verbal series* and *ascending Frattini series*.

§ 2. Verbal subgroups

It is natural to restrict attention to functions f that depend not so much on the individual group as on its isomorphism type; that is to say, it is natural to assume that

$$f(G\iota) = (f(G))\,\iota$$

for every isomorphic mapping ι of the group G. Such a function f assigns to isomorphic groups isomorphic subgroups that are, moreover, "isomorphically situated"; and $f(G)$ is then necessarily a characteristic subgroup of G.

One of the most important features of the derived group used in the discussion [10] of ascending derived series is its corresponding behaviour under homomorphisms: every homomorphism of a group maps its derived group onto the derived group of the map. This suggests imposing on the function f the condition that it commutes with homomorphisms, that is that

$$f(G\omega) = \big(f(G)\big)\omega \tag{2.1}$$

for every group G and homomorphism ω of G. In this section we derive an alternative (and more familiar) description of such functions.

It is immediately seen that such a function assigns to each group G a *strictly characteristic* (BAER [1]) subgroup $f(G)$, that is a subgroup which admits all homomorphisms of G onto[1]) G. Next we see that the function f is completely determined by its values for free groups; for every group G is a homomorphic map of a free group F:

$$G = F\omega,$$

whence by (2.1)

$$f(G) = \big(f(F)\big)\omega.$$

Now we show that in a free group of infinite rank a subgroup that admits all ependomorphisms[1]) also admits all endomorphisms, and is thus *fully invariant.*

LEMMA 2.2. *Let F be a free group of infinite rank and U a strictly characteristic subgroup of F. Then U is fully invariant in F.*

PROOF. Let X be a free basis of F, and $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ an element of U expressed as a word in generators $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Let η be an arbitrary endomorphism of F. Then there is an ependomorphism θ of F such that

$$x_1\theta = x_1\eta,\ x_2\theta = x_2\eta,\ \ldots,\ x_n\theta = x_n\eta.$$

It suffices to define θ by these equations together with equations $x\theta = x'$ for the remaining generators $x \in X$ in such a way that θ maps $X - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ onto X; and this is possible because X is assumed infinite. Then

$$u\eta = u\theta \in U\theta = U.$$

It follows that $U\eta \subseteq U$, and as the endomorphism η was arbitrary, U is fully invariant.

It may be remarked that the corresponding proposition for free groups of finite rank is not valid; for an ependomorphism of a free group of finite rank is necessarily an automorphism, and thus for these groups "strictly characteristic" is no more than just "characteristic"; and it is known that

[1]) The term *epimorphism* has recently been proposed for *homomorphism onto*; here we have *endomorphisms onto,* which will correspondingly be called *ependomorphisms.* Similarly the recent creation of *monomorphism* for *isomorphism into* suggests *monendomorphism* for *one-to-one endomorphism.*

there are characteristic but not fully invariant subgroups of free groups of finite rank. In this context I should like to draw attention to the unsolved problem whether free groups of infinite rank have characteristic subgroups that are not fully invariant.

The fully invariant subgroups of free groups are known: they are the *verbal subgroups*. If $\mathfrak{V}$ is a set of words $v(x, y, \ldots)$, $w(x, y, \ldots), \ldots$, then the corresponding verbal subgroup $\mathfrak{V}(G)$ of the group G is the group generated by the "values" of these words in G, that is the elements $v(g, h, \ldots), w(g, h, \ldots), \ldots$ obtained when arbitrary elements $g, h, \ldots$ of G are substituted for the "variables" $x, y, \ldots$. One easily sees that a verbal subgroup is necessarily fully invariant; in free groups the converse is also true [9, Theorem 9.1].

THEOREM 2.3. *The functions f with the properties*

$$f(G) \leqq G, \tag{1.1}$$

$$f(G\omega) = (f(G))\omega \tag{2.1}$$

(for all groups G and their homomorphisms ω) are just those given by the verbal subgroups

$$f(G) = \mathfrak{V}(G), \tag{2.4}$$

the set $\mathfrak{V}$ of words depending on f but not on G.

PROOF. It is obvious that for given $\mathfrak{V}$, (2.4) defines a function with the required properties. Conversely we have already seen that if f with these properties is given, then $f(F)$ is fully invariant and thus verbal in F whenever F is free of infinite rank. Also, if $f(F) = \mathfrak{V}(F)$ and if $G = F\omega$, then

$$f(G) = f(F\omega) = (f(F))\omega = (\mathfrak{V}(F))\omega = \mathfrak{V}(F\omega) = \mathfrak{V}(G).$$

It only remains to show that $\mathfrak{V}$ can be chosen to be independent of the free group F. To this end we take a free group F_0 of denumerably infinite rank and choose $\mathfrak{V}$ as a set of words whose *verbal closure* $\mathfrak{V}(F_0)$ in F_0 is $f(F_0)$. Now let F be an arbitrary free group of infinite rank, and let $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ be an element of $f(F)$, expressed in terms of generators $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taken from some basis of F. There is a homomorphism ω of F onto F_0 that maps $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onto the first n generators $y_1, y_2, \ldots, y_n$ of some free basis $y_1, y_2, \ldots$ of F_0. Hence $u(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in f(F_0) - \mathfrak{V}(F_0)$. Conversely, if $u(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathfrak{V}(F_0) - f(F_0)$, then $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in f(F)$, because of the same homomorphism. It follows that $f(F) = \mathfrak{V}(F)$. Finally, if F_r is a free group of finite rank r, then there is a homomorphism of F_0 onto F_r, and by what we have already seen this implies $f(F_r) = \mathfrak{V}(F_r)$.

It may be remarked that the cardinal number of the set of possible functions f thus equals the cardinal number of the set of verbal subgroups of F_0; this clearly can not be less than $\aleph_0$ nor greater than $2^{\aleph_0}$ — but what it is remains an unsolved problem.

We mention, as a corollary to Theorem 2.3, that *a function f with the properties* (1.1), (2.1) *assumed in the theorem is monotone*, that is to say, $H \leqq G$ *implies* $f(H) \leqq f(G)$.

§ 3. Ascending $\mathfrak{V}$-series

We now consider ascending f-series when f is as in § 2. Thus

$$f(G) = \mathfrak{V}(G),$$

and we speak of *verbal series* or $\mathfrak{V}$-*series*. The series we study are then of the form

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots, \qquad G_i = \mathfrak{V}(G_{i+1}).$$

We put

$$G^* = \cup G_i;$$

if the series breaks off, then G^* is its last term; if the series is infinite and not constant, then G^* is its inductive limit and different from all its terms. If θ is a homomorphism of G^*, then

$$G_0\theta \leqq G_1\theta \leqq G_2\theta \leqq \cdots$$

is also a $\mathfrak{V}$-series, as

$$G_i\theta = \left(\mathfrak{V}(G_{i+1})\right)\theta = \mathfrak{V}(G_{i+1}\theta);$$

and the union of this series is

$$\cup G_i\theta = G^*\theta.$$

We shall apply this especially to the canonic homomorphism of G^* onto G^*/G_0, to obtain a series that starts with the trivial group. This is legitimate because G_0 is characteristic (even fully invariant) in G_1 and G_1 is characteristic in G_2; therefore G_0 is characteristic in G_2, and then similarly in G_3, and so on; thus G_0 is normal in all G_i and then also in their union G^*, and the factor group G^*/G_0 is defined. For the sake of notational simplicity we shall give effect to this homomorphism by assuming G_0 trivial when convenient. It may be remarked that the argument used to show G_0 normal in G^* will equally show that every G_i, and indeed every characteristic subgroup of a G_i, is normal in G^*.

Assuming then for the present that G_0 is trivial, we consider[2]) the effect on G_i, for fixed i, of the inner automorphisms of G^*. As a normal subgroup G_i admits these inner automorphisms, and they therefore induce a certain group Γ_i^* of automorphisms of G_i. We obtain Γ_i^* from G^* by a homomorphism θ_i with the centralizer C_i^* of G_i in G^* as kernel. Transformation by the elements of G_k induces a subgroup of Γ_i^* on G_i, namely

$$\Gamma_i^k = G_k\theta_i \cong G_k C_i^*/C_i^*.$$

It follows that

$$\Gamma_i^0 \leqq \Gamma_i^1 \leqq \Gamma_i^2 \leqq \cdots \tag{3.1}$$

is an ascending $\mathfrak{V}$-series, and this also starts with the trivial group. The series may, or may not, ascend properly. If $\Gamma_i^k = \Gamma_i^{k-1}$, then also

$$\Gamma_i^{k-2} = \mathfrak{V}(\Gamma_i^{k-1}) = \mathfrak{V}(\Gamma_i^k) = \Gamma_i^{k-1},$$

[2]) We here closely follows § 3 of [10].

and continuing thus, we find that

$$\Gamma_i^k = \Gamma_i^{k-1} = \cdots = \Gamma_i^0$$

is trivial. This means that then G_i and G_k centralize each other; that is, if $i \leqq k$, then G_i lies in the centre of G_k, and if $i > k$, then G_k lies in the centre of G_i. Denoting, as usual, by $[A, B]$ the group generated by all commutators $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ with $a \in A$ and $b \in B$, and dropping the assumption that G_0 is trivial, we thus arrive at the conclusion that *if* $\Gamma_i^{k-1} = \Gamma_i^k$, *then* $[G_i, G_k] \leqq G_0$. In particular, if G_i/G_0 is non-abelian, then $\Gamma_i^{i-1} \neq \Gamma_i^i$, and the series (3.1) is not constant. Remembering that all Γ_i^k are automorphism groups of G_i, and Γ_i^i in particular is the group of inner automorphisms of G_i, we see that

$$\Gamma_i^i/\Gamma_i^i \leqq \Gamma_i^{i+1}/\Gamma_i^i \leqq \Gamma_i^{i+2}/\Gamma_i^i \leqq \cdots$$

is an ascending $\mathfrak{V}$-series of subgroups of the automorphism class group $A(G_i)$ of G_i; and if G_i/G_0 is non-abelian, then this series ascends properly. If we know that in $A(G_i)$ there are no infinite ascending $\mathfrak{V}$-series of subgroups, it follows that our original $\mathfrak{V}$-series breaks off. This is in particular the case when $A(G_i)$ is finite. Thus we have

THEOREM 3.2. *If G_i/G_0 is non-abelian for some i, and if the automorphism class group $A(G_i)$ is finite, then the ascending $\mathfrak{V}$-series*

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots$$

breaks off.

The assumption of finiteness of $A(G_i)$ could here be replaced by the "ascending $\mathfrak{V}$-chain condition for subgroups" of $A(G_i)$. An immediate consequence of the theorem is the following corollary.

COROLLARY 3.3. *If G_i/G_0 is finite and non-abelian then the ascending $\mathfrak{V}$-series breaks off.*

From this one can further deduce:

THEOREM 3.4. *If G_i/G_0 is finitely generated, non-abelian, and soluble, then the ascending $\mathfrak{V}$-series*

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots$$

breaks off.

PROOF. It has been shown elsewhere [*10*, Lemma 7.2] that every finitely generated strictly metabelian group contains a characteristic subgroup whose factor group is finite and strictly metabelian. This obviously implies the following lemma.

LEMMA 3.5. *Every finitely generated non-abelian and soluble group contains a characteristic subgroup whose factor group is finite and non-abelian.*

Reducing modulo G_0 and further modulo such a characteristic subgroup of G_i, we obtain a new ascending $\mathfrak{V}$-series

$$\{1\} = H_0 \leqq H_1 \leqq H_2 \leqq \cdots$$

in which H_i is finite and non-abelian. By Corollary 3.3 this series breaks off, and so then does the original series; and the theorem follows.

The assumption that G_i/G_0 is finitely generated can clearly not be omitted. The assumption that G_i/G_0 is non-abelian can not be dispensed with, either: this is seen by taking G_i as the cyclic group of order p^i for some (fixed) prime number p, with the obvious embedding of G_i in G_{i+1}. Then

$$\{1\} = G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots$$

is an infinite properly ascending $\mathfrak{W}$-series, where the set $\mathfrak{W}$ of words simply consists of x^p; but all G_i are finitely generated and soluble.

Whether the assumption of solubility is really needed I do not know, but would conjecture that it is not. Too little is as yet known about the finitely generated infinite simple groups, about the laws that are satisfied in them, and about their automorphism class groups, to decide the question

§ 4. Ascending Frattini series

We turn to the consideration of a different kind of function, namely the function that assigns to every group G its Frattini subgroup $\Phi(G)$. This is defined as the intersection of all maximal (proper) subgroups of G, if G has maximal subgroups; otherwise one puts $\Phi(G) = G$. An alternative characterization of $\Phi(G)$ is in terms of the "non-generators" of G, that is those elements that can be omitted from any generating set of G in which they occur; the non-generators form a subgroup of G, and this[3]) is $\Phi(G)$.

The Frattini subgroup is not necessarily fully invariant; this is shown by the following example[4]): Let A be the holomorph of the cyclic group of order 5, or, equivalently, the group (of order 20) generated by elements a, b with the defining relations

$$a^5 = b^4 = 1, \quad b^{-1} a b = a^2.$$

Let C be cyclic of order 4, generated by an element c. Finally let G be the direct product

$$G = A \times C.$$

The Frattini subgroup of A is trivial; that of C is the cycle of order 2 generated by c^2; and that of G is the direct product of these two[5]),

$$\Phi(G) = \Phi(A) \times \Phi(C),$$

that is again $\{c^2\}$. If η denotes the endomorphism of G which maps A trivially and C on the subgroup $\{b\}$ of order 4 in A, then

$$\Phi(G\eta) = \{b^2\} \not\leqq \Phi(G).$$

Thus $\Phi(G)$ does not admit η and is not fully invariant.

---

[3]) Compare for instance [8].

[4]) Adapted from one used by Gaschütz [5] for a similar purpose. In this paper Gaschütz is interested in finite groups only; for this reason, and also to make the present paper reasonably self-contained, I have not tried to avoid any overlap with his paper.

[5]) Miller [7]; Gaschütz [5], Satz 6.

The monotoneity mentioned at the end of § 2 does not apply to Frattini subgroups either: this is seen at once from the group A of our example and its subgroup $\{b\}$.

A homomorphism does not necessarily map the Frattini subgroup of the original onto the Frattini subgroup of the image, but at least onto a group that is comparable with the Frattini subgroup of the image; for we have the following lemma [6]).

LEMMA 4.1. *If θ is a homomorphism of the group G then*

$$(\Phi(G))\,\theta \leqq \Phi(G\theta).$$

PROOF. If M is a maximal subgroup of G then $M\theta$ is either a maximal subgroup of $G\theta$ or the whole of $G\theta$ (namely according as M does, or does not, contain the kernel of θ). Conversely, if M^* is a maximal subgroup of $G\theta$, and if M is the complete inverse image of M^* under θ (that is the unique greatest subgroup of G mapped by θ into M^*), then M is a maximal subgroup of G. It follows that

$$\Phi(G\theta) = \cap M^* = \cap (M\theta), \tag{4.2}$$

the first intersection extending over all maximal subgroups M^* of $G\theta$, the second over all maximal subgroups M of G. Now

$$(\Phi(G))\,\theta = (\cap M)\,\theta \leqq \cap (M\theta),$$

and combining this with (4.2), we obtain the lemma. One can prove the lemma also by showing that θ maps every non-generator s of G on a non-generator of $G\theta$; for if $s\theta$ together with a set T^* generates $G\theta$, if T is an inverse image of T^* in G, and if K is the kernel of θ, then s, T, and K together generate G; then also T and K together generate G, and applying θ we find that $T\theta = T^*$ generates $G\theta$. Thus $s\theta$ is a non-generator of $G\theta$, and the lemma again follows.

We now consider ascending Frattini series

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots, \qquad G_i = \Phi(G_{i+1}).$$

If θ is a homomorphism of

$$G^* = \cup G_i,$$

and $G_i\theta = H_i$, then

$$H_0 \leqq H_1 \leqq H_2 \leqq \cdots$$

is not in general again a Frattini series, because Lemma 4.1 allows us only to conclude that

$$H_i \leqq \Phi(H_{i+1}). \tag{4.3}$$

Nevertheless it is possible to prove propositions analogous to Theorems 3.2 and 3.4:

THEOREM 4.4. *Let G_i have a characteristic subgroup N with finite, non-abelian factor group G_i/N. Then the ascending Frattini series*

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots$$

breaks off.

[6]) GASCHÜTZ [5], Satz 3.

PROOF. As before, N is normal in G^*. We denote by Γ_i^* the group of automorphisms induced by G^*/N in G_i/N, and by Γ_i^k the subgroup of Γ_i^* induced in G_i/N by G_k/N. Then

$$\Gamma_i^* = G^* \theta_i, \qquad \Gamma_i^k = G_k \theta_i,$$

where the homomorphism θ_i is obtained by first reducing G^* modulo N and then the factor group modulo the centralizer of G_i/N. The ascending series

$$\Gamma_i^0 \leqq \Gamma_i^1 \leqq \Gamma_i^2 \leqq \cdots \tag{4.5}$$

is not in general a Frattini series; but applying (4.3) we obtain that

$$\Gamma_i^k \leqq \Phi(\Gamma_i^{k+1}). \tag{4.6}$$

Now each Γ_i^k is an automorphism group of the group G_i/N which is finite by assumption. Hence each Γ_i^k is finite, and therefore either trivial or distinct from its Frattini subgroup: this is in fact true, more generally, of all finitely generated groups. Hence if the series (4.5) contains a non-trivial group, then it must, by (4.6), ascend properly (after, possibly, some trivial terms). Now Γ_i^i is the group of inner automorphisms of G_i/N, and as G_i/N is assumed non-abelian, Γ_i^i is non-trivial. It follows that the series (4.5) does ascend properly; but as it consists of automorphism groups of the fixed finite group G_i/N, it must break off, and the theorem follows.

COROLLARY 4.7. *If G_i/G_0 is finite and non-abelian then the ascending Frattini series*

$$G_0 \leqq G_1 \leqq G_2 \leqq \cdots$$

breaks off.

COROLLARY 4.8. *If G_i/G_0 is finitely generated and soluble but not abelian, then the ascending Frattini series breaks off.*

This follows like Theorem 3.4 from Lemma 3.5. The example at the end of § 3 can be used to show that here also the assumption that G_i/G_0 is not abelian can not be dispensed with; the assumption of solubility is most probably superfluous.

It may be remarked that in all these results the Frattini subgroup $\Phi(G)$ can be replaced by the Baer-Frattini subgroup $\Phi^e(G)$ which is defined as the intersection of all proper maximal subgroups of finite index (see BAER [2] p. 314).

Our results imply that there are groups that cannot be Frattini subgroups of any group whatsoever. And indeed a finite Frattini subgroup must be nilpotent[7]). There are also examples among the nilpotent groups, even the finite nilpotent groups, that are not Frattini subgroups of any group, finite or infinite. In fact an interesting necessary condition formulated by GA-

[7]) BAER [3] remarks that the Frattini subgroup is nilpotent if it is soluble with maximal condition for subgroups. If it is finite, one can do without the assumption of solubility: in fact the classical proof of FRATTINI [1] applies without change. For examples of non-nilpotent Frattini subgroups, see [6].

schütz [5, Theorem 11] for a group H to be the Frattini subgroup of a finite group G does not really require G, but only H to be finite (and can be extended also to some infinite groups H). It follows from this that, for example, neither of the non-abelian groups of order 8 is a Frattini subgroup — a fact not difficult to verify directly. In this context we state an unsolved problem: If the finite group H is the Frattini subgroup of some group, is H then also (isomorphic to) the Frattini subgroup of a suitable *finite* group?

References

[1] Baer, R.: The higher commutator subgroups of a group. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 143—160 (1944). — [2] Baer, Reinhold: Das Hyperzentrum einer Gruppe III. Math. Z. **59**, 299—338 (1953). — [3] Baer, R.: Review of K. A. Hirsch: On infinite soluble groups V. Math. Reviews **15**, 851 (1954). — [4] Frattini, G.: Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni. Atti R. Accad. dei Lincei, Rendiconti (IV) **1**, 281—285 (1885). — [5] Gaschütz, Wolfgang: Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen. Math. Z. **58**, 160—170 (1953). — [6] Higman, Graham, and B. H. Neumann: On two questions of Itô. J. London Math. Soc. **29**, 84—88 (1954). — [7] Miller, G. A.: The φ-subgroup of a group. Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 20—26 (1915); Collected Works **3**, 441—447 (1946). — [8] Neumann, B. H.: Some remarks on infinite groups. J. London Math. Soc. **12**, 120—127 (1937). — [9] Neumann, B. H.: Identical relations in groups I. Math. Ann. **114**, 506—525 (1937). — [10] Neumann, B. H.: Ascending derived series. Compos. Math. **13**, 47—64 (1956).

The University, Manchester 13 (England)

(Eingegangen am 14. Oktober 1957)

THRON, W. J.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 173–182 (1958)

On Parabolic Convergence Regions for Continued Fractions*)

By
W. J. THRON

1. INTRODUCTION. Among convergence criteria for continued fractions

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{1}+\cdots, \tag{1.1}$$

those based on the family of parabolas P_α play a particularly important roll. The parabolas P_α can be defined geometrically as those that have their focus at the origin and pass through the point $z=-\frac{1}{4}$, analytically they can be described as follows:

$$a_n \in P_\alpha \text{ if and only if } |a_n| - \Re(a_n e^{-2i\alpha}) \leqq \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha.$$

Here $-\pi/2<\alpha<\pi/2$.

Two groups of requirements enter into the statements of the convergence theorems, which we are concerned with. In each group the conditions are here arranged in order of increasing strength.

I
(a) $a_n \in P_\alpha$, for all $n \geqq 1$;
(b) $a_n \in K$, for all $n \geqq 1$, where K is a closed set in the interior of P_α.

II
(a) at least one of the series $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_2 \cdots a_{2\nu}}{a_3 \cdots a_{2\nu+1}}$, $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{a_3 \cdots a_{2\nu-1}}{a_4 \cdots a_{2\nu}}$ diverges,
(b) $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{-\frac{1}{2}}$ diverges,
(c) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu|a_\nu|)^{-1}$ diverges,
(d) $|a_n| < M$, for all $n \geqq 1$.

The first parabola theorem, for $\alpha=0$, is due to SCOTT and WALL [5]. They proved that I(a) and II(a) together are sufficient for the convergence of the continued fraction (1.1).

*) This research was supported in part by the United States Air Force under Contract No. AF 49(638)–100 monitored by the AF Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

For general α the sufficiency of I(b) and II(a) was proved by PAYDON and WALL [2]. LEIGHTON and THRON [1] independently, proved that I(b) and II(d) together are sufficient for the convergence of (1.1). Somewhat later THRON [7] established the sufficiency of conditions I(a) and II(a) for all permissible α. This is known to be a best result.

Nevertheless there are some deficiencies in the present state of the subject. All proofs, except those for the case $\alpha = 0$, are non-elementary, in that use is made of either the Stieltjes-Vitali theorem [8, p. 142] or the theory of positive definite continued fractions and the theorem of invariability [9, IV and p. 96]. This, as PERRON [3, v. 2 p. 82] points out, is aesthetically undesirable. In addition these methods do not yield results of uniform convergence in case all elements are allowed to vary independently. This type of uniform convergence is of importance in the convergence neighborhood theorems (see [3, v. 2 p. 90]). Finally, the present proofs give very little or no insight at all into the question of how fast the approximants of the continued fraction approach their limiting value.

In this article we attempt to remedy these shortcomings: Our methods are elementary, and in the key formula (3.3) we have a usable estimate of the error committed if the continued fraction is replaced by one of its approximants. The formula also gives a good deal of information as to the factors that influence the rapidity of convergence of the continued fraction. A convergence neighborhood result in which the convergence is proved to be uniform, even though the elements a_n be functions of any number of variables, is presented in Theorem B. In this theorem the convergence neighborhoods extend to the boundary of the parabola P_α. In Theorem C we obtain a parabola theorem which requires only condition (a) in group I, but does require condition (c) in group II. In addition two results in which the a_n lie in different parabolas for different values of n are established.

In the proof we employ the well known "nest of circles" argument, the sharp estimate for B_n/B_{n-1} first used by SINGH and THRON [6], and a new way of computing the radii of the nested circles. This last step involves integration and can, if desired, be replaced by the possibly more elementary argument using the geometry of inversions.

2. PRELIMINARY CONSIDERATIONS. Let regions P_n and V_n be defined respectively by

$$(2.1) \qquad a_n \in P_n, \text{ if and only if } a_n = e^{2i\alpha} k_n g_n (1 - g_{n+1}) \cos^2\alpha (u_n + i v_n),$$

$$\text{where } v_n^2 \leqq 4u_n + 4,\ 0 < k_n \leqq 1$$

and

$$(2.2) \qquad v_n \in V_n, \text{ if and only if } \Re(v_n e^{-i\alpha}) \geqq -g_n \cos\alpha.$$

Here the constants α and g_n, $n = 1, 2, \ldots$, are subject to the following restrictions $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, $0 < g_n < 1$.

The following group of lemmas will be useful.

LEMMA 1. $\Re\left((u+iv)/(x+iy)\right) \geq -1/c$, *provided* $v^2 \leq 4u+4$, *and* $x \geq c > 0$.

For the proof we note that

$$F = \Re\left((u+iv)/(x+iy)\right) = \frac{ux+vy}{x^2+y^2}.$$

Leaving u, v and x fixed we determine the value of y that minimizes F. From elementary calculus this value is known to be one of the solutions of the equation

$$vy^2 + 2uxy - x^2v = 0.$$

That is

$$y = x\left(-u \pm \sqrt{u^2+v^2}\right)/v.$$

Thus

$$\min_{-\infty<y<\infty} F = \frac{-v^2\sqrt{u^2+v^2}}{2x\left(u^2+v^2+u\sqrt{u^2+v^2}\right)} = \frac{-v^2}{2x\left(u+\sqrt{u^2+v^2}\right)}.$$

Continuing to keep u and x fixed we now allow v to vary. It can vary only between $0 \leq v^2 \leq 4u-4$. There is no critical point in this range, so the minimum is attained for $v^2 = 4u+4$. This leads to

$$\min_{y,\,v} F = \frac{-(4u+4)}{2x\left(u+(u+2)\right)} = -\frac{1}{x}.$$

Since $x \geq c > 0$ the lemma is proved.

Our next lemma is not new (see for example [9, p. 70]). For completeness sake a proof is included here.

LEMMA 2. *If* $w_{n+1} \in V_{n+1}$, *and* $a_n \in P_n$, *then*

$$\frac{a_n}{1+w_{n+1}} \in V_n.$$

If w_{n+1} satisfies the conditions of the lemma then $1+w_{n+1}$ can be written as

$$1 + w_{n+1} = e^{i\alpha}(1 - g_{n+1})\cos\alpha\,(s+it),$$

where $s \geq 1$. Hence

$$\Re\left(e^{-i\alpha}\frac{a_n}{1+w_{n+1}}\right) = k_n g_n \cos\alpha\,\Re\left(\frac{u_n+iv_n}{s+it}\right).$$

An application of Lemma 1 then completes the proof of this lemma.

Now introduce

$$t_n(w) = \frac{a_n}{1+w},$$

and inductively

$$T_1(w) = t_1(w), \quad T_n(w) = T_{n-1}\left(t_n(w)\right), \quad n \geq 2.$$

If we denote, as is customary, the numerator and denominator of the n-th approximant of the continued fraction (1.1) by A_n and B_n, respectively,

then we can write

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \cdots + \frac{a_n}{1} = T_n(0),$$

and in general

$$T_n(w) = \frac{A_{n-1}w + A_n}{B_{n-1}w + B_n}. \tag{2.1}$$

The quantities A_n and B_n satisfy the well known (see for example [3, vol. 1, p. 7 and p. 14]) relations

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + a_n A_{n-2}, & A_0 = 0, \quad A_1 = a_1, \\ B_n = B_{n-1} + a_n B_{n-2}, & B_0 = 1, \quad B_1 = 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

and

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu, \qquad n \geq 1. \tag{2.3}$$

Now let K_n be the circular region[1]) defined[2]) by $K_n = T_n(V_{n+1})$, and let C_n and R_n be its boundary and radius, respectively. From Lemma 2 we have $t_n(V_{n+1}) \subset V_n$ and hence

$$K_n = T_{n-1}(t_n(V_{n+1})) \subset T_{n-1}(V_n) = K_{n-1}.$$

The regions K_n thus form a set of nested circles. Since $w = 0 \in V_{n+1}$ for every n, $T_n(0) \in K_n$, and since $K_{n+m} \subset K_n$ it also follows that $T_{n+m}(0) \in K_n$, so that we have

$$|T_n(0) - T_{n+m}(0)| \leq 2R_n.$$

Since the sequence of approximants of the continued fraction (1.1) is the sequence $\{T_n(0)\}$, convergence of (1.1) can therefore be established if it can be shown that $\lim R_n = 0$.

To obtain R_n we use the formula

$$2\pi R_n = l(C_n) = \int_{D_{n+1}} |T_n'(w)|\,|dw|, \tag{2.4}$$

where D_{n+1} is the boundary of V_{n+1}. From formulas (2.1) and (2.3) we have

$$|T_n'(w)| = \frac{\left|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right|}{|B_{n-1}|^2 |w + S_n|^2},$$

where $S_n = B_n/B_{n-1}$. That $B_{n-1} \neq 0$ follows from Lemma 3 below. In our approach to the evaluation of R_n, we require more information about S_n. From relations (2.2) one deduces that $S_1 = 1$ and that

$$S_n = \frac{B_n}{B_{n-1}} = 1 + a_n / S_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

[1]) K_n is the interior of C_n, since K_n is contained in the half-plane V_1.
[2]) The symbol $f(V)$ is understood to mean the set of all $f(w)$, $w \in V$.

With the help of this formula we are now able to prove our third lemma.

LEMMA 3. *Let* $a_n \in P_n$, *and write*

$$S_n = e^{i\alpha}\cos\alpha\, g_{n+1}(x_n + i y_n),$$

then

$$\min x_n = \frac{\sum_{k=0}^{n}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}{\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}.$$

Here the minimum is taken over all permissible k_n.

From the relation $S_n = 1 + a_n/S_{n-1}$ we have immediately

$$e^{i\alpha}g_{n+1}\cos\alpha\,(x_n + i y_n) = 1 + k_n\,\frac{e^{2i\alpha}\cos^2\alpha\, g_n(1-g_{n+1})\,(u_n + i v_n)}{e^{i\alpha}\cos\alpha\, g_n(x_{n-1} + i y_{n-1})}$$

and hence, since $1 = e^{i\alpha}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$, by dividing both sides by $e^{i\alpha}\cos\alpha$ and then taking real parts, one obtains

$$g_{n+1}x_n = 1 + k_n(1-g_{n+1})\,\frac{u_n x_{n-1} + y_{n-1}v_n}{x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2}.$$

If now $\min x_{n-1}$ exists and is positive an application of Lemma 1 yields for $c = \min x_{n-1}$

$$g_{n+1}\min x_n = 1 - (1-g_{n+1})/\min x_{n-1}. \tag{2.5}$$

From the relation $1 = S_1 = e^{i\alpha}\cos\alpha\, g_2(x_1 + i y_1)$ follows

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos\alpha\, g_2(x_1 + i y_1)$$

and hence

$$x_1 = \min x_1 = 1/g_2.$$

Since $\prod_{\nu=1}^{0}$ has to be interpreted as 1, this establishes the lemma for $n = 1$. Now assume $\min x_{n-1}$ exists and is given by our formula then from (2.5)

$$\min x_n = \left(\frac{1}{g_{n+1}}-1\right) + 1 - \left(\frac{1}{g_{n+1}}-1\right)\Big/\min x_{n-1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{g_{n+1}}-1\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right) - \sum_{k=0}^{n-2}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}{\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}{\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)},$$

and the lemma is thus proved by induction.

It is convenient to write

$$\min x_n = 1 + d_n$$

so that

$$d_n = \frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)}{\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{1}{g_{\nu+1}}-1\right)} \qquad (2.6)$$

3. THE MAIN THEOREMS. We are now ready to return to the evaluation of R_n.

$$\int_{D_{n+1}} |T_n'(w)|\,|dw| = \left|\frac{\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu}{B_{n-1}^2}\right| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha\, g_{n-1}\, dy}{(\cos\alpha\, g_{n-1}\, y - \Im(e^{-i\alpha} S_n))^2 + (\Re(e^{-i\alpha} S_n) - g_{n-1}\cos\alpha)^2}.$$

To arrive at this expression we had set w, which has to move along D_{n+1}, equal to

$$e^{i\alpha}\cos\alpha\, g_{n+1}(-1+iy)$$

and had written

$$|w+S_n| = |\cos\alpha\, g_{n+1}(-1+iy) + e^{-i\alpha} S_n|.$$

Now let $u = y\cos\alpha\, g_{n+1} + \Im(S_n e^{-i\alpha})$, the integral then becomes

$$2\pi R_n = \left|\frac{\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu}{B_{n-1}^2}\right| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + (\Re(e^{-i\alpha} S_n) - g_{n+1}\cos\alpha)^2}$$

$$= \frac{\pi\left|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right|}{|B_{n-1}|^2\,|\Re(e^{i\alpha}\bar{S}_n) - g_{n+1}\cos\alpha|},$$

so that we have on the one hand

$$R_n = \frac{\left|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right|}{2|-g_{n+1}\cos\alpha\,|B_{n-1}^2| + \Re(\bar{B}_n B_{n-1} e^{i\alpha})|}, \qquad (3.1)$$

and on the other hand, using the formulas (2.2) for the B_n

$$R_n = \frac{\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu}{2|\Re((\bar{B}_n B_{n-1} - g_{n+1} B_{n-1}\bar{B}_{n-1})\, e^{i\alpha})|}$$

$$= \frac{\left|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right|}{2|\Re(e^{i\alpha} B_{n-1}(\bar{B}_{n-1}(1-g_{n+1}) + \bar{a}_n \bar{B}_{n-2}))|},$$

and finally

$$R_n = \frac{\left|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right|}{2|(1-g_{n-1})\cos\alpha\,|B_{n-1}|^2 + \Re(\bar{a}_n B_{n-1}\bar{B}_{n-2} e^{i\alpha})|}. \qquad (3.2)$$

Replacing n by $n-1$ in (3.1) we have

$$R_{n-1} = \frac{\left|\prod_{\nu=1}^{n-1} a_\nu\right|}{2\left|-g_n\cos\alpha\,|B_{n-2}|^2 + \Re(\bar{B}_{n-1}B_{n-2}e^{i\alpha})\right|}.$$

Hence

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = \left|\frac{|a_n|\,(-g_n\cos\alpha\,|B_{n-2}|^2 + \Re(\bar{B}_{n-1}B_{n-2}e^{i\alpha}))}{(1-g_{n+1})\cos\alpha\,|B_{n-1}|^2 + \Re(\bar{a}_n B_{n-1}\bar{B}_{n-2}e^{i\alpha})}\right.$$
$$\left. - \frac{|a_n|\,(-g_n\cos\alpha + \Re(\bar{S}_{n-1}e^{i\alpha}))}{(1-g_{n+1})\cos\alpha\,|S_{n-1}|^2 + \Re(\bar{a}_n S_{n-1}e^{i\alpha})}\right|.$$

Since we assume $a_n \in P_n$ we can set

$$a_n = e^{2i\alpha}k_n g_n(1-g_{n+1})\cos^2\alpha(u_n + iv_n), \qquad v_n^2 \leqq 4u_n + 4,\ 0 < k_n \leqq 1,$$

and

$$S_{n-1} = e^{i\alpha}g_n\cos\alpha(x_{n-1} + iy_{n-1}), \qquad x_{n-1} \geqq 1 + d_{n-1}.$$

Upon substitution one obtains

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = \left|\frac{k_n g_n(1-g_{n+1})\cos^2\alpha(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}(-g_n\cos\alpha + g_n\cos\alpha\,x_{n-1})}{(1-g_{n-1})\cos^3\alpha\,g_n^2(x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2) + (1-g_{n-1})g_n^2\cos^3\alpha\,k_n(x_{n-1}u_n + y_{n-1}v_n)}\right|$$
$$= \left|\frac{k_n(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}(x_{n-1}-1)}{x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 + k_n(x_{n-1}u_n + y_{n-1}v_n)}\right|$$
$$= \left|k_n\frac{(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}(x_{n-1}-1)}{x_{n-1}^2 + x_{n-1}u_n k_n + \left(y_{n-1} + \frac{k_n v_n}{2}\right)^2 - \frac{v_n^2 k_n^2}{4}}\right|.$$

The denominator is not increased if the square is omitted and the remaining v_n^2 is replaced by $4u_n + 4$. The absolute value signs can now be omitted, since numerator and denominator are clearly positive.

This leads to the inequality

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} \leqq k_n\frac{(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}(x_{n-1}-1)}{(x_{n-1}-k_n)(x_{n-1}+k_n+u_n k_n)}$$
$$= k_n\frac{(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}(x_{n-1}-1)}{(x_{n-1}-k_n)(x_{n-1}-k_n+k_n(u_n+2))}.$$

The inequality is further strengthened if we replace the first k_n in the denominator by 1, and u_n+2 by $(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Thus

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} \leqq \frac{1}{\left(1 + \frac{x_{n-1}-k_n}{(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}k_n}\right)}.$$

From (3.1) we have $R_1 = |a_1|/2(1-g_2)\cos\alpha$. Also

$$(u_n^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}k_n = |a_n|/\cos^2\alpha\,g_n(1-g_{n+1}), \quad \text{and} \quad x_{n-1} \geqq 1 + d_{n-1},$$

so that

$$R_n \leqq \frac{|a_1|}{2(1-g_2)\cos\alpha\prod_{\nu=2}^{n}\left(1 + \frac{(1-k_\nu+d_{\nu-1})\cos^2\alpha\,g_\nu(1-g_{\nu+1})}{|a_\nu|}\right)}. \tag{3.3}$$

It follows from the definition of R_n that the difference between the n-th approximant and the limiting value of a convergent continued fraction is, in absolute value, not greater than $2R_n$. We note that the convergence of the continued fraction can be quite rapid if the a_n are bounded in absolute value and stay a sufficient distance away from the boundaries of the parabolic regions P_n, for example if $k_n = \frac{1}{2}$ for all n.

For the derivation of convergence criteria we are only interested in the case $k_n = 1$, for all n. A sufficient condition for $\lim R_n = 0$ is then the divergence of the series

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{d_{\nu-1} g_\nu (1 - g_{\nu+1})}{|a_\nu|}. \tag{3.4}$$

This, as was pointed out earlier is thus sufficient for the convergence of the continued fraction (1.1).

Now let $|a_n| < M$, and $\varepsilon < g_n < 1 - \varepsilon$, for all n, then the series (3.4) diverges if the series $\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu$ diverges. It is well known that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \Big/ \sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu \right)$$

converge and diverge together [4, p. 327]. From formula (2.6) we can therefore conclude that the continued fraction (1.1) converges if the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{k} \left(\frac{1}{g_{\nu+1}} - 1 \right)$$

diverges. This completes the proof of Theorem A.

THEOREM A. *Let $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ and let M and ε be positive constants, $\varepsilon < \frac{1}{2}$. The continued fraction (1.1), whose elements are of the form*

$$a_n = e^{2i\alpha} g_n (1 - g_{n+1}) \cos^2 \alpha (u_n + i v_n), \quad \text{where } v_n^2 \leq 4u_n + 4$$

converges if the three conditions

(i) $$|a_n| < M,$$

(ii) $$\varepsilon < g_n < 1 - \varepsilon,$$

(iii) $$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{k} \left(\frac{1}{g_{\nu+1}} - 1 \right) \text{ diverges,}$$

are satisfied.

This theorem overlaps a result of WALL [9, p. 137] if all $\varphi_n = -\alpha$. Our theorem is weaker in that more stringent requirements are imposed on the g_n and in that we require boundedness of the $|a_n|$. However we permit the a_n to approach or lie on the boundaries of the regions P_n. This is not the case in WALL'S result.

The case in which all $g_n = \frac{1}{2}$ is the most interesting. Then $d_n = 1/n$, so that if we require in addition that $|a_n| < M$, we arrive at an estimate for R_n

which is completely independent of the elements a_n of the continued fraction. We have

$$R_n \leq \frac{2M}{\cos\alpha \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{4M\nu}\right)}.$$

It follows that the convergence of the continued fraction is uniform, regardless of what variables, finite or infinite in number, the a_n may depend on. The following result has now been proved.

THEOREM B. *Let $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. If all elements of the continued fraction* (1.1) *lie in the parabola P_α, that is if*

$$|a_n| - \Re(a_n e^{-2i\alpha}) \leq \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha,$$

and if in addition there exists an $M > 0$ such that $|a_n| < M$ for all n, then the continued fraction (1.1) *converges. If the a_n are functions of any number of variables then the convergence of the continued fraction is uniform, provided that throughout the ranges of the variables the elements a_n are subject to the above conditions.*

If the a_n are not assumed to be bounded one easily establishes the following parabola theorem.

THEOREM C. *Let $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. If all elements of the continued fraction* (1.1) *lie in the parabola P_α, that is if*

$$|a_n| - \Re(a_n e^{-2i\alpha}) \leq \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha,$$

then a sufficient condition for the convergence of (1.1) *is the divergence of*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| n)^{-1}.$$

The relation of this theorem to previously known results was discussed fully in the introduction to this article.

As a final case we discuss the results obtained by setting $g_n = \frac{n}{2n-1}$. Then

$$d_n = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right) > 1/\big((n+1)(1+\log n)\big),$$

so that the divergence of the series $\sum (|a_n| n \log n)^{-1}$ insures the convergence of the continued fraction (1.1). The resulting theorem gives a sequence of parabolas $P_{\alpha,n}$, which close down upon the parabola P_α from the outside.

THEOREM D. *Let $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. If the element a_n of the continued fraction* (1.1) *lies in the parabola $P_{\alpha,n}$, that is if*

$$|a_n| - \Re(a_n e^{-2i\alpha}) \leq \frac{2n^2}{4n^2-1}\cos^2\alpha,$$

for all $n \geq 1$, then a sufficient condition for the convergence of (1.1) *is the divergence of*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| n \log n)^{-1}.$$

References

[1] Leighton, W., and W. J. Thron: Continued fractions with complex elements. Duke Math. J. **9**, 763—772 (1942). — [2] Paydon, J. F., and H. S. Wall: The continued fraction as a sequence of linear fractional transformations. Duke Math. J. **9**, 360—372 (1942). — [3] Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3. Aufl. Stuttgart: Bd. 1, 1954 und Bd. 2, 1957. — [4] Pringsheim, A.: Vorlesungen über Zahlenlehre, Bd. I/2. Leipzig 1916. — [5] Scott, W. T., and H. S. Wall: A convergence theorem for continued fractions. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 155—172 (1940). — [6] Singh, V., and W. J. Thron: A family of best twin convergence regions for continued fractions. Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 277—282 (1956). — [7] Thron, W. J.: Two families of twin convergence regions for continued fractions. Duke Math. J. **10**, 677—685 (1943). — [8] Thron, W. J.: Introduction to the theory of functions of a complex variable. New York 1953. — [9] Wall, H. S.: Analytic Theory of Continued Fractions. New York 1948.

Dept. of Math., University of Colorado, Boulder, Col. (U.S.A.)

(Eingegangen am 24. Oktober 1957)

Rieger, G. J.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 183—194 (1958)

Verallgemeinerung der Selbergschen Formel auf Idealklassen mod f in algebraischen Zahlkörpern

Von
G. J. Rieger

Alle bisher bekanntgewordenen elementaren Beweise für den Primzahlsatz ruhen auf der sog. Selbergschen Formel

$$(1) \qquad \sum_{p \le x} \log^2 p + \sum_{pq \le x} \log p \cdot \log q = 2x \log x + O(x) \qquad (p, q \text{ prim})$$

oder einer damit sehr verwandten Aussage. Auch der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen läßt sich auf diesem Wege elementar beweisen, wenn man von der ganz analog beweisbaren Formel

$$(2) \qquad \sum_{\substack{p \\ p \equiv l \bmod k}} \log^2 p + \sum_{\substack{pq \\ pq \equiv l \bmod k}} \log p \cdot \log q = \frac{2}{\varphi(k)} x \log x + O(x) \quad \begin{pmatrix} p, q \text{ prim} \\ (k, l) = 1 \end{pmatrix}$$

ausgeht. Offenbar ist (1) als Spezialfall $k = 1$ in (2) enthalten. Wie Shapiro zeigte, läßt sich auch in beliebigen algebraischen Zahlkörpern (an Stelle des Körpers der rationalen Zahlen) eine Selbergsche Formel beweisen:

$$(3) \qquad \sum_{N\mathfrak{p} \le x} \log^2 N\mathfrak{p} + \sum_{N\mathfrak{p}\mathfrak{q} \le x} \log N\mathfrak{p} \cdot \log N\mathfrak{q} = 2x \log x + O(x) \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \text{ Primideale}),$$

wobei über alle Primideale $\mathfrak{p}$ bzw. alle Ideale der Gestalt $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ summiert wird, deren Norm $\le x$ ist. Aus (3) folgerte dann Shapiro den Primidealsatz in elementarer Weise[1]). Es ist offensichtlich, daß (3) die Formel (1) als Spezialfall enthält, nicht jedoch die Formel (2).

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Selbergsche Formel für Idealklassen mod f algebraischer Zahlkörper zu beweisen (Satz 1)[2]). Das gelingt mit der gleichen Methode, mit der Shapiro (2) und (3) bewies[3]). Satz 1 wird dann die Aussagen (1), (2), (3) als Sonderfälle enthalten.

Bei den im folgenden immer wiederkehrenden Bezeichnungen bedeuten:

x eine positive reelle Zahl,
a, b, k, l, m, n natürliche Zahlen,
p, q Primzahlen,
K einen algebraischen Zahlkörper vom Grad n,
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f}$ Ideale aus K,
$\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ Primideale,
$N\mathfrak{a}$ die Norm des Ideals $\mathfrak{a}$,

[1]) Vgl. [5].
[2]) Für eine ähnliche Fragestellung vgl. [1].
[3]) Vgl. [4] und [5].

$\mathfrak{o}$ das Einheitsideal,

c_1, c_2 höchstens von K und f abhängige Konstanten.

Alle in $O(\,)$ auftretenden Konstanten hängen höchstens von K und f ab. „$O(\,)$" meint stets „$O(\,)$ für $x \to \infty$".

1. Bekanntes aus der Idealtheorie

Definition 1[3]). $\mathfrak{a}$ ist äquivalent zu $\mathfrak{b}$ mod f oder $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehören zur selben Klasse $\mathfrak{H}$ mod f:

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \bmod f,$$

wenn

$$(\mathfrak{a}, f) = \mathfrak{o}, \quad (\mathfrak{b}, f) = \mathfrak{o}$$

ist und wenn es zwei ganze totalpositive Zahlen ξ und η im Körper K gibt, daß

$$\langle \xi \rangle \mathfrak{a} = \langle \eta \rangle \mathfrak{b}$$

und

$$\xi \equiv \eta \equiv 1 \bmod f$$

ist; dabei bedeutet $\langle \xi \rangle$ das von ξ erzeugte Hauptideal.

Die Anzahl der Klassen, in welche mod f die zu f teilerfremden Ideale zerfallen, bezeichnen wir mit $h(f)$.

Definition 2[4]). $\mathfrak{a}$ ist äquivalent zu $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehören zur selben Klasse $\mathfrak{R}$ des Körpers K:

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b},$$

wenn es zwei ganze Zahlen ξ und η in K gibt mit

$$\langle \xi \rangle \mathfrak{a} = \langle \eta \rangle \mathfrak{b}.$$

Die Anzahl der Klassen des Körpers bezeichnen wir mit h.

Zur Unterscheidung sprechen wir also im einen Falle von „Klassen mod f" und im anderen Falle von „Klassen des Körpers" oder von „Klassen" schlechthin. Offenbar liegen zwei Zahlen, die mod f zur selben Klasse gehören, in ein und derselben Klasse des Körpers. Darüber hinaus gilt, daß die zu f teilerfremden Ideale jeder Klasse des Körpers in gleich viele, also in je $\frac{h(f)}{h}$ Klassen mod f zerfallen[5]).

Satz [von LANDAU[6])]. *Für die Anzahl* $H(x; \mathfrak{H} \bmod f)$ *der Ideale* $\mathfrak{a}$ *einer Klasse* $\mathfrak{H}$ mod f *mit Norm* $\leq x$ *gilt:*

$$H(x; \mathfrak{H} \bmod f) = \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{H} \bmod f}} 1 = \beta(f)\, x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right), \tag{4}$$

$$\beta(f) = \frac{h}{h(f)} \lambda \prod_{\mathfrak{p} \mid f} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right),$$

[3]) Vgl. [3], Definition VIII.
[4]) Vgl. [2], Definition 36.
[5]) Vgl. [3], Satz XCVII.
[6]) Vgl. [3], Satz XCVI.

wo λ das Residuum der zu irgendeiner Klasse $\mathfrak{K}$ gehörigen ζ-Funktion an der Stelle $s=1$ bedeutet.

[Bekanntlich ist diese Funktion in der ganzen Ebene regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s=1$, und das Residuum an dieser Stelle ist von der Klasse $\mathfrak{K}$ unabhängig[7]).] Somit gilt für die Anzahl $H(x)$ der zu f teilerfremden Ideale $\mathfrak{a}$ mit Norm $\leq x$:

$$H(x) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x \\ (\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} 1 = \gamma x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right), \tag{5}$$

$$\gamma = h(f)\beta. \tag{6}$$

Satz [von Weber[8])]. *Für die Anzahl $H(x,\mathfrak{K})$ der Ideale $\mathfrak{a}$ einer Klasse $\mathfrak{K}$ mit Norm $\leq x$ gilt:*

$$H(x,\mathfrak{K}) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x \\ \mathfrak{a}\sim\mathfrak{K}}} 1 = \lambda x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right).$$

Somit gilt für die Anzahl $H'(x)$ aller Ideale $\mathfrak{a}$ des Körpers K mit Norm $\leq x$:

$$H'(x) = \sum_{\mathfrak{a}\leq x} 1 = h\lambda x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right);$$

dabei haben λ und h die oben angegebene Bedeutung.

Wir führen jetzt die verallgemeinerte Möbiussche Funktion und die verallgemeinerte von Mangoldtsche Funktion ein.

Definition 3. Es sei

$$\mu(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathfrak{a}=\mathfrak{o}, \\ (-1)^m & \text{für „quadratfreie“ } \mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\dots\mathfrak{p}_m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 4. Es sei

$$\Lambda(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{b}\mid\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) \log N\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}.$$

Für diese Funktionen gilt bekanntlich:

$$\sum_{\mathfrak{b}\mid\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathfrak{a}=\mathfrak{o}, \\ 0 & \text{für } \mathfrak{a}\neq\mathfrak{o} \end{cases} \tag{7}$$

---

[7]) Vgl. [2], Satz 154.

[8]) Weber hatte das schwächere Restglied $O\left(x^{1-\frac{1}{n}}\right)$. Die verschärfte Form geht auf Landau zurück (vgl. [2], Satz 210). Für unsere Zwecke ist ein beliebiges Restglied $O(x^{1-\varepsilon(K)})$ mit $\varepsilon(K)>0$ ausreichend.

und

$$\Lambda(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathfrak{a} = \mathfrak{o}, \\ \log N\mathfrak{p} & \text{für } \mathfrak{a} = \mathfrak{p}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{8}$$

Hilfssatz A. *Es ist*

$$\sum_{\mathfrak{b}\mid\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) \log^2 N\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \Lambda(\mathfrak{a}) \log N\mathfrak{a} + \sum_{\mathfrak{b}\mid\mathfrak{a}} \Lambda(\mathfrak{b})\, \Lambda\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right).$$

Diese Identität läßt sich entweder direkt verifizieren oder bequemer aus der für die Dedekindsche Z-Funktion

$$Z(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

offensichtlich geltenden Identität

$$\frac{Z''(s)}{Z(s)} = \left(\frac{Z'(s)}{Z(s)}\right)' + \left(\frac{Z'(s)}{Z(s)}\right)^2$$

durch Koeffizientenvergleich gewinnen.

Während der Beweis von SHAPIRO für (3) wesentlich auf dem Satz von WEBER ruht, stützen wir uns entscheidend auf den Satz von LANDAU.

2. Hilfssätze

Hilfssatz 1. *Es sei $f(x)$ eine für alle reellen $x>0$ erklärte komplexwertige Funktion und*

$$g(x) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x \\ (\mathfrak{a},\,f)=\mathfrak{o}}} f\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right); \tag{9}$$

dann ist

$$f(x) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x \\ (\mathfrak{a},\,f)=\mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{a})\, g\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right). \tag{10}$$

Beweis. Offenbar ist

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x \\ (\mathfrak{a},\,f)=\mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{a})\, g\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right) &= \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x \\ (\mathfrak{a},\,f)=\mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{a}) \sum_{\substack{N\mathfrak{b}\le \frac{x}{N\mathfrak{a}} \\ (\mathfrak{b},\,f)=\mathfrak{o}}} f\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}\,N\mathfrak{b}}\right) \\ &= \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\mathfrak{b}\le x \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{b},\,f)=\mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{a})\, f\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right) \\ &= \sum_{\substack{N\mathfrak{c}\le x \\ (\mathfrak{c},\,f)=\mathfrak{o}}} f\left(\frac{x}{N\mathfrak{c}}\right) \sum_{\mathfrak{a}\mid\mathfrak{c}} \mu(\mathfrak{a}) = f(x) \end{aligned}$$

wegen (7), womit Hilfssatz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\frac{1}{N\mathfrak{a}}=\gamma\log x+c_1+O\left(x^{-\frac{2}{n+1}}\right).$$

Beweis. Schreiben wir (5) in der Gestalt

$$H(x)=\gamma x+r(x),\qquad r(x)=O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right),\tag{11}$$

so folgt

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\frac{1}{N\mathfrak{a}}&=\sum_{m\le x}\frac{H(m)-H(m-1)}{m}=\gamma\sum_{m\le x}\frac{1}{m}+\sum_{m\le x}\frac{r(m)-r(m-1)}{m}\\&=\gamma\sum_{m\le x}\frac{1}{m}+\frac{r([x])}{[x]}+\sum_{m\le x-1}\frac{r(m)}{m(m+1)}\\&=\gamma\sum_{m\le x}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r(m)}{m(m+1)}+O\left(\sum_{m\ge x}m^{-1-\frac{2}{n+1}}\right)+O\left(x^{-\frac{2}{n+1}}\right)\\&=\gamma\log x+c_1+O\left(x^{-\frac{2}{n+1}}\right),\end{aligned}$$

womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Hilfssatz 3. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\frac{\log N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{a}}=\frac{\gamma}{2}\log^2 x+c_2+O\left(x^{-\frac{2}{n+1}}\log x\right).$$

Beweis. Wegen (11) ist

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\frac{\log N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{a}}&=\sum_{m\le x}\left(H(m)-H(m-1)\right)\frac{\log m}{m}\\&=\gamma\sum_{m\le x}\frac{\log m}{m}+\sum_{m\le x}\left(r(m)-r(m-1)\right)\frac{\log m}{m}\\&=\gamma\sum_{m\le x}\frac{\log m}{m}+\frac{r([x])\log[x]}{[x]}+\sum_{m\le x-1}r(m)\left(\frac{\log m}{m}-\frac{\log(m+1)}{m+1}\right)\\&=\gamma\sum_{m\le x}\frac{\log m}{m}+\sum_{m=1}^{\infty}r(m)\left(\frac{\log m}{m}-\frac{\log(m+1)}{m+1}\right)+O\left(x^{-\frac{2}{n+1}}\log x\right)\\&=\frac{\gamma}{2}\log^2 x+c_2+O\left(x^{-\frac{2}{n+1}}\log x\right),\end{aligned}$$

womit Hilfssatz 3 bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\le x\\\mathfrak{a}\in\mathfrak{H}\bmod f}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}=\beta(f)\,x+O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log x\right).$$

Beweis. Wegen (4) ist

$$\sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}}\log\frac{x}{\mathfrak{N}\mathfrak{a}}=\sum_{m\leq x}\big(H(m,\mathfrak{H})-H(m-1,\mathfrak{H})\big)\log\frac{x}{m}$$

$$=H\big([x],\mathfrak{H}\big)\log\frac{x}{[x]}+\sum_{m\leq x-1}H(m,\mathfrak{H})\Big(\log\frac{x}{m}-\log\frac{x}{m+1}\Big)$$

$$=\sum_{m\leq x-1}H(m,\mathfrak{H})\log\Big(1+\frac{1}{m}\Big)+O(1)$$

$$=\beta\sum_{m\leq x-1}m\Big(\frac{1}{m}+O\big(m^{-2}\big)\Big)+O\Big(\sum_{m\geq x}m^{-\frac{2}{n+1}}\Big)$$

$$=\beta x+O(\log x)+\begin{cases}O\Big(x^{1-\frac{2}{n+1}}\Big) & \text{für } n>1\\ O(\log x) & \text{für } n=2\end{cases}$$

$$=\beta x+O\Big(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log x\Big),$$

womit Hilfssatz 4 bewiesen ist.

Hilfssatz 5. *Es ist*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}\bmod f}}\log^2\frac{x}{\mathfrak{N}\mathfrak{a}}=2\beta(f)\,x+O\Big(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log^2 x\Big).$$

Beweis. Wegen (4) ist

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}}\log^2\frac{x}{\mathfrak{N}\mathfrak{a}}=\sum_{m\leq x}\big(H(m,\mathfrak{H})-H(m-1,\mathfrak{H})\big)\log^2\frac{x}{m}$$

$$=\sum_{m\leq x}H(m,\mathfrak{H})\Big(\log^2\frac{x}{m}-\log^2\frac{x}{m+1}\Big)+H\big([x],\mathfrak{H}\big)\log^2\frac{x}{[x]+1}$$

$$=\sum_{m\leq x}H(m,\mathfrak{H})\log\Big(1+\frac{1}{m}\Big)\big(2\log x-\log m(m+1)\big)+O(1)$$

$$=\sum_{m\leq x}\Big(\beta m+O\Big(m^{1-\frac{2}{n+1}}\Big)\Big)\Big(\frac{1}{m}+O\big(m^{-2}\big)\Big)\times$$

$$\times\Big(2\log x-2\log m+O\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big)+O(1)$$

$$=2\log x\sum_{m\leq x}\Big(\beta+O\Big(m^{-\frac{2}{n+1}}\Big)\Big)-\sum_{m\leq x}\times$$

$$\times\Big(2\beta\log m+O\Big(m^{-\frac{2}{n+1}}\log m\Big)\Big)+O(\log^2 x)$$

$$=2\beta x\log x-2\beta\big(x\log x-x+O(\log x)\big)+O\Big(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log^2 x\Big)$$

$$=2\beta x+O\Big(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log^2 x\Big),$$

womit Hilfssatz 5 bewiesen ist.

Hilfssatz 6. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H} \bmod f}} \log N\mathfrak{a} = \beta(f)\, x\log x - \beta(f)\, x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log x\right).$$

Beweis. Hilfssatz 4 besagt

$$\log x \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}} 1 - \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}} \log N\mathfrak{a} = \beta x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log x\right),$$

woraus zusammen mit (4) sofort Hilfssatz 6 folgt.

Hilfssatz 7. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H} \bmod f}} \log^2 N\mathfrak{a} = \beta(f)\, x\log^2 x - 2\beta(f)\, x\log x + 2\beta(f)\, x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log^2 x\right).$$

Beweis. Hilfssatz 5 besagt

$$\log^2 x \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}} 1 - 2\log x \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}} \log N\mathfrak{a} + \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}} \log^2 N\mathfrak{a} = 2\beta x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log^2 x\right),$$

woraus zusammen mit (4) und Hilfssatz 6 sofort Hilfssatz 7 folgt.

Hilfssatz 8. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ (\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = O(1).$$

Beweis. In Hilfssatz 1 setzen wir $f(x)=1$; dann wird wegen (9)

$$g(x) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ (\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} 1.$$

Aus (10) erhalten wir also wegen (5)

$$1 = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ (\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{a})\left(\gamma\frac{x}{N\mathfrak{a}} + O\left(\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{2}{n+1}}\right)\right). \tag{12}$$

Da aber $|\mu(\mathfrak{a})|\leq 1$ und

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ (\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}} \left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{2}{n+1}} = x^{1-\frac{2}{n+1}} \sum_{m\leq x} \left(H(m)-H(m-1)\right)\left(\frac{1}{m}\right)^{1-\frac{2}{n+1}} \\ \qquad = x^{1-\frac{2}{n+1}}\left(\frac{H([x])}{[x]^{1-\frac{2}{n+1}}} + \right. \\ \qquad\quad \left. + \displaystyle\sum_{m\leq x-1} H(m)\left(\left(\frac{1}{m}\right)^{1-\frac{2}{n+1}} - \left(\frac{1}{m+1}\right)^{1-\frac{2}{n+1}}\right)\right) \\ \qquad = O\left(x + \displaystyle\sum_{m\leq x-1} m\cdot m^{\frac{2}{n+1}-2}\right) = O(x) \end{cases} \tag{13}$$

wegen (5), folgt aus (12) unmittelbar Hilfssatz 8.

Hilfssatz 9. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}}}\frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}=O(1).$$

Beweis. In Hilfssatz 1 setzen wir $f(x)=x$; dann wird

$$g(x)=\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}}}\frac{x}{N\mathfrak{a}}=\gamma\,x\log x+c_1x+O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right)$$

wegen (9) und Hilfssatz 2. Aus (10) erhalten wir also

$$x=\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}}}\mu(\mathfrak{a})\left(\gamma\,\frac{x}{N\mathfrak{a}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}+c_1\,\frac{x}{N\mathfrak{a}}+O\left(\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{2}{n+1}}\right)\right),$$

woraus wegen (13) und Hilfssatz 8 unmittelbar Hilfssatz 9 folgt.

Hilfssatz 10. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\(\mathfrak{a},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{2}{n+1}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}=O(x).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\(\mathfrak{o},\mathfrak{f})=\mathfrak{a}}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{2}{n+1}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}&=\sum_{m\leq x}(H(m)-H(m-1))\left(\frac{x}{m}\right)^{1-\frac{2}{n+1}}\log\frac{x}{m}\ \text{[wegen (5)]}\\
&=x^{1-\frac{2}{n+1}}\left(\frac{H([x])}{[x]^{1-\frac{2}{n+1}}}\log\frac{x}{[x]}+\sum_{m\leq x-1}H(m)\times\right.\\
&\quad\left.\times\left(m^{\frac{2}{n+1}-1}\log\frac{x}{m}-(m+1)^{\frac{2}{n+1}-1}\log\frac{x}{m+1}\right)\right)\\
&=O(x)+O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\sum_{m\leq x-1}m\times\right.\\
&\quad\left.\times\left(m^{\frac{2}{n+1}-2}\log\frac{x}{m}+m^{\frac{2}{n+1}-2}\right)\right)\quad\text{[wegen (5)]}\\
&=O(x)+O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\times\right.\\
&\quad\left.\times\left(\int_1^{x-1}\left(t^{\frac{2}{n+1}-1}\log\frac{x}{t}+t^{\frac{2}{n+1}-1}\right)dt+O(\log x)\right)\right)\\
&=O(x),
\end{aligned}$$

womit Hilfssatz 10 bewiesen ist.

Hilfssatz 11. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\log^2\frac{x}{N\mathfrak{a}}=\frac{2}{\gamma}\log x+O(1).$$

Beweis. In Hilfssatz 1 setzen wir $f(x)=x\log x$; dann wird

$$g(x)=x\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\frac{\log x-\log N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{a}}$$

$$=\frac{\gamma}{2}x\log^2 x+c_1 x\log x-c_2 x+O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\log x\right)$$

wegen (9), Hilfssatz 2 und Hilfssatz 3. Aus (10) erhalten wir also

$$x\log x=\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\(\mathfrak{a},f)=\mathfrak{o}}}\mu(\mathfrak{a})\left(\frac{\gamma}{2}\frac{x}{N\mathfrak{a}}\log^2\frac{x}{N\mathfrak{a}}+c_1\frac{x}{N\mathfrak{a}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}-c_2\frac{x}{N\mathfrak{a}}+\right.$$

$$\left.+O\left(\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-\frac{2}{n+1}}\log\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)\right),$$

woraus wegen Hilfssatz 9, Hilfssatz 8 und Hilfssatz 10 die Behauptung folgt.

3. Beweis von Satz 1

Satz 1. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\leq x\\\mathfrak{p}\in\mathfrak{H}\bmod f}}\log^2 N\mathfrak{p}+\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\mathfrak{q}\leq x\\\mathfrak{p}\mathfrak{q}\in\mathfrak{H}\bmod f}}\log N\mathfrak{p}\cdot\log N\mathfrak{q}=\frac{2}{h(f)}x\log x+O(x).$$

Beweis. Wir summieren die Identität von Hilfssatz A über eine Klasse $\mathfrak{H}\bmod f$:

$$(14)\qquad\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\\mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}}\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}}\mu(\mathfrak{b})\log^2 N\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}=\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\\mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}}\Lambda(\mathfrak{a})\log N\mathfrak{a}+\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\\mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}}\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}}\Lambda(\mathfrak{b})\Lambda\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right).$$

Für die Summe auf der linken Seite ergibt sich

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\\mathfrak{a}\in\mathfrak{H}}}\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}}\mu(\mathfrak{b})\log^2 N\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}=\sum_{\substack{N\mathfrak{b}\mathfrak{d}\leq x\\\mathfrak{b}\mathfrak{d}\in\mathfrak{H}}}\mu(\mathfrak{b})\log^2 N\mathfrak{d}$$

$$=\sum_{\substack{N\mathfrak{b}\leq x\\(\mathfrak{b},f)=\mathfrak{o}}}\mu(\mathfrak{b})\cdot\sum_{\substack{N\mathfrak{d}\leq x/N\mathfrak{b}\\\mathfrak{d}\in\mathfrak{H}'}}\log^2 N\mathfrak{d}.$$

Dabei haben wir die wohlbekannte Tatsache benutzt[9]: Die Menge aller $\mathfrak{d}$, für die bei gegebenem $\mathfrak{b}$ mit $(\mathfrak{b},f)=\mathfrak{o}$ die Ideale $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ in einer bestimmten Klasse $\mathfrak{H}\bmod f$ liegen, ist selbst eine Klasse $\mathfrak{H}'=\mathfrak{H}'(b)\bmod f$. Unter Benutzung von

[9]) Vgl. [3], Satz XXX.

Hilfssatz 7 können wir in der letzten Formel so fortfahren:

$$= \sum_{\substack{N\mathfrak{b} \leq x \\ (\mathfrak{b}, f) = \mathfrak{o}}} \mu(\mathfrak{b}) \left(\beta \frac{x}{N\mathfrak{b}} \log^2 \frac{x}{N\mathfrak{b}} - 2\beta \frac{x}{N\mathfrak{b}} \log \frac{x}{N\mathfrak{b}} + 2\beta \frac{x}{N\mathfrak{b}} + O\left(\left(\frac{x}{N\mathfrak{b}} \right)^{1 - \frac{2}{n+1}} \log^2 \frac{x}{N\mathfrak{b}} \right) \right)$$

$$= \frac{2\beta}{\gamma} x \log x + O(x)$$

wegen Hilfssatz 11, Hilfssatz 9, Hilfssatz 8 und wegen

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{b} \leq x \\ (\mathfrak{b}, f) = \mathfrak{o}}} \left(\frac{x}{N\mathfrak{b}} \right)^{1 - \frac{2}{n+1}} \log^2 \frac{x}{N\mathfrak{b}} = \sum_{m \leq x} (H(m) - H(m-1)) \left(\frac{x}{m} \right)^{1 - \frac{2}{n+1}} \log^2 \frac{x}{m}$$

$$= x^{1 - \frac{2}{n+1}} \left(\frac{H([x])}{[x]^{1 - \frac{2}{n+1}}} \log^2 \frac{x}{[x]} \right.$$

$$\left. + \sum_{m \leq x-1} H(m) \left(m^{\frac{2}{n+1} - 1} \log^2 \frac{x}{m} - (m+1)^{\frac{2}{n+1} - 1} \log^2 \frac{x}{m+1} \right) \right)$$

$$= O(x) + O\left(x^{1 - \frac{2}{n+1}} \sum_{m \leq x-1} m \left(m^{\frac{2}{n+1} - 2} \log^2 \frac{x}{m} + m^{\frac{2}{n+1} - 2} \log \frac{x}{m} \right) \right) \text{ [wegen (5)]}$$

$$= O(x) + O\left(x^{1 - \frac{2}{n+1}} \left(\int_1^{x-1} \left(t^{\frac{2}{n+1} - 1} \log^2 \frac{x}{t} + t^{\frac{2}{n+1} - 1} \log \frac{x}{t} \right) dt + O(\log^2 x) \right) \right)$$

$$= O(x).$$

Wegen (6) haben wir damit gefunden:

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{H}}} \sum_{\mathfrak{b} | \mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) \cdot \log^2 N \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{2}{h(f)} x \log x + O(x).$$

Da außerdem wegen (8)

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{H}}} \Lambda(\mathfrak{a}) \cdot \log N\mathfrak{a} = \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \leq x \\ \mathfrak{p}^a \in \mathfrak{H}}} a \cdot \log^2 N\mathfrak{p},$$

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \mathfrak{q}^b \leq x \\ \mathfrak{p}^a \mathfrak{q}^b \in \mathfrak{H}}} \log N\mathfrak{p} \cdot \log N\mathfrak{q} + \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \leq x \\ \mathfrak{p}^a \in \mathfrak{H}}} (a-1) \log^2 N\mathfrak{p} = \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{H}}} \sum_{\mathfrak{b} | \mathfrak{a}} \Lambda(\mathfrak{b}) \Lambda\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \right),$$

geht (14) über in

$$(15) \qquad \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \leq x \\ \mathfrak{p}^a \in \mathfrak{H}}} (2a-1) \log^2 N\mathfrak{p} + \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \mathfrak{q}^b \leq x \\ \mathfrak{p}^a \mathfrak{q}^b \in \mathfrak{H}}} \log N\mathfrak{p} \cdot \log N\mathfrak{q} = \frac{2}{h(f)} x \log x + O(x).$$

Da nun zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ eine rationale Primzahl p gehört mit $N\mathfrak{p} = p^{e_\mathfrak{p}}$, wo $e_\mathfrak{p}$ eine natürliche Zahl $\leq n$ ist[10]), und da zu jedem p höchstens n Prim-

[10]) Vgl. [2], Satz 107.

ideale $\mathfrak{p}$ gehören, deren Normen Potenzen dieser Zahl p sind, folgt:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \le x \\ a>1 \\ \mathfrak{p}^a \in \mathfrak{H}}} (2a-1)\log^2 N\mathfrak{p} \le \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \le x \\ a>1}} (2a-1)\log^2 N\mathfrak{p} \\
&\le 2\cdot\frac{\log x}{\log 2}\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a \le x \\ a>1}} \log^2 N\mathfrak{p} \\
&\le 2\cdot\frac{\log x}{\log 2}\, n \sum_{\substack{p^a \le x \\ a>1}} \log^2 p^n \\
&\le 2\cdot\frac{\log x}{\log 2}\, n^3 \log x \sum_{\substack{p^a \le x \\ a>1}} \log p \\
&\le 2\cdot\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^2 n^3 \log x \sum_{p^a \le x} \log p \\
&= O\left(\sqrt{x}\log^3 x\right) \\
&= O(x)
\end{aligned} \tag{16}
$$

$\left[\text{wegen } \sum_{p\le x}\log p = O(x)\right]$ und

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a\mathfrak{q}^b \le x \\ ab>1 \\ \mathfrak{p}^a\mathfrak{q}^b \in \mathfrak{H}}} \log N\mathfrak{p}\cdot\log N\mathfrak{q} \le \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^a\mathfrak{q}^b \le x \\ ab>1}} \log N\mathfrak{p}\cdot\log N\mathfrak{q} \\
&\le n^2 \sum_{\substack{p^a q^b \le x \\ ab>1}} \log p^n \cdot \log q^n \\
&= n^4 \sum_{\substack{p^a q^b \le x \\ ab>1}} \log p\cdot\log q \\
&\le 2n^4\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^2 \sum_{pq^2\le x} \log p \log q \\
&\le 2n^4\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^2 \log x \sum_{q^2\le x} \log q \\
&= O\left(\sqrt{x}\log^3 x\right) \\
&= O(x)
\end{aligned} \tag{17}
$$

$\left[\text{wegen } \sum_{p\le x}\log p = O(x)\right]$. Schreiben wir jetzt in (15) die Summen für $a=1$ und $a>1$ bzw. für $ab=1$ und $ab>1$ getrennt auf und beachten wir (16) und (17), so folgt

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\le x \\ \mathfrak{p}\in\mathfrak{H}}} \log^2 N\mathfrak{p} + \sum_{\substack{N\mathfrak{p}\mathfrak{q}\le x \\ \mathfrak{p}\mathfrak{q}\in\mathfrak{H}}} \log N\mathfrak{p}\cdot\log N\mathfrak{q} = \frac{2}{h(f)}\, x\log x + O(x),$$

womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Aus Satz 1 folgt unmittelbar eine Selbergsche Formel für Idealklassen $\mathfrak{K}$ (also im Sinne von Definition 2):

Satz 2. *Es ist*

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\leq x \\ \mathfrak{p}\in\mathfrak{K}}} \log^2 N\mathfrak{p} + \sum_{\substack{N\mathfrak{p}\mathfrak{q}\leq x \\ \mathfrak{p}\mathfrak{q}\in\mathfrak{K}}} \log N\mathfrak{p}\cdot\log N\mathfrak{q} = \frac{2}{h}\, x\log x + O(x).$$

Selbstverständlich läßt sich Satz 2 auch direkt und zwar auf dem gleichen Wege wie Satz 1 beweisen.

4. Bemerkungen

Offenbar ist (3) als Spezialfall $f=\mathfrak{o}$ und somit (1) als Spezialfall $f=\mathfrak{o}$, $n=1$ in Satz 1 enthalten.

Da die Klasseneinteilung vermöge des Äquivalenzbegriffes von Definition 1 im Falle $n=1$ (also im Falle des Körpers der rationalen Zahlen) genau die Einteilung aller zu $f=k$ teilerfremden natürlichen Zahlen in prime Restklassen ist, enthält Satz 1 (und auch Satz 2) für $f=k$ die Formel (2) und damit auch wieder Formel (1).

Der Beweis von Satz 1 (und Satz 2) ist noch nicht in allen Teilen elementar, da der Beweis von (4) und (5) bis heute nur mit Hilfe komplexer Funktionentheorie (Residuensatz) bewiesen werden konnte. Die von Weber zum Beweis von

$$H(x) = \gamma x + O\left(x^{1-\frac{1}{n}}\right)\ ^{11})$$

benutzte Methode ist frei von komplexer Funktionentheorie; sie läßt sich unmittelbar auf den Fall von $H(x, \mathfrak{H} \bmod f)$ übertragen und liefert

$$H(x, \mathfrak{H} \bmod f) = \beta(f)\, x + O\left(x^{1-\frac{1}{n}}\right),$$

womit Satz 1 (und Satz 2) elementar, d.h. ohne Verwendung des Residuensatzes bewiesen ist.

Auf die Frage nach einem in f gleichmäßig gültigen Fehlerglied in (4) und Anwendung auf Satz 1 hoffen wir bei späterer Gelegenheit zurückzukommen.

Literatur

[1] Forman, W., and H. N. Shapiro: Abstract Prime Number Theorems. Comm. Pure Appl. Math. **7**, 587—619 (1954). — [2] Landau, E.: Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. Leipzig-Berlin 1918. — [3] Landau, E.: Über Ideale und Primideale in Idealklassen. Math. Z. **2**, 52—154 (1918). — [4] Shapiro, H. N.: On Primes in Arithmetic Progressions I. Ann. of Math. **52**, 217—230 (1950). — [5] Shapiro, H. N.: An Elementary Proof of the Prime Ideal Theorem. Comm. Pure Appl. Math. **2**, 309—323 (1949).

Gießen (Lahn), Mathem. Institut der Justus Liebig-Hochschule

(Eingegangen am 15. Februar 1957)

---

11) Vgl. 8).

Shukla, H. S.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 195—201 (1958)

On certain Transformations of nearly-poised Basic bilateral Hypergeometric Series of the Type ${}_M\Psi_M$

By
Hari Shanker Shukla

1. *Introduction.* Slater [4] in 1952 gave relations involving general and well-poised ${}_M\Psi_M$ series, but relations connecting nearly-poised series of the type ${}_M\Psi_M$ were not considered by her. In this paper I consider Slater's transformation to obtain certain relations involving nearly-poised basic bilateral hypergeometric series of the type ${}_M\Psi_M$. The main interest in considering these relations is in giving particular values to M to obtain special transformations of nearly-poised series with the help of known transformations.

The following notation is used throughout the paper:

$$(a;n) = (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}); \qquad (a;0) = 1$$

$$(a;-n) = (-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}/a^n (q/a;n); \qquad |q| < 1$$

$$(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1); \qquad (a)_0 = 1; \qquad (a)_{-n} = (-1)^n/(1-a)_n$$

$${}_r\Psi_r\left[\begin{matrix}a_1, a_2, \dots, a_r; z\\ b_1, b_2, \dots, b_r\end{matrix}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a_1;n)(a_2;n)\dots(a_r;n)}{(b_1;n)(b_2;n)\dots(b_r;n)} z^n;$$

$${}_rH_r\left[\begin{matrix}a_1, a_2, \dots, a_r; z\\ b_1, b_2, \dots, b_r\end{matrix}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_r)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_r)_n} z^n;$$

$$\Pi\left[\begin{matrix}a_1, a_2, \dots, a_r;\\ b_1, b_2, \dots, b_r\end{matrix}\right] = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a_1q^n)(1-a_2q^n)\dots(1-a_rq^n)}{(1-b_1q^n)(1-b_2q^n)\dots(1-b_rq^n)};$$

$$\Gamma\left[\begin{matrix}a_1, a_2, \dots, a_r;\\ b_1, b_2, \dots, b_r\end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\dots\Gamma(a_r)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\dots\Gamma(b_r)},$$

and idem $(a;b)$ means that the preceding expression is repeated with a and b interchanged.

2. Slater [4] gave the following relation which expresses a general bilateral ${}_M\Psi_M(x)$ series in terms of M other series of the same type:

$$\begin{cases} \Pi\left[\begin{matrix}xA, q/xA, b_1, b_2, \dots, b_M, q/c_1, q/c_2, \dots, q/c_M;\\ a_2, a_2, \dots, a_M, q/a_1, q/a_2, \dots, q/a_M\end{matrix}\right] {}_M\Psi_M\left[\begin{matrix}c_1, c_2, \dots, c_M; x\\ b_1, b_2, \dots, b_M\end{matrix}\right] \\ = \frac{q}{a_1}\Pi\left[\begin{matrix}a_1 xA/q, q^2/A\, x a_1, a_1/c_1, a_1/c_2, \dots, a_1/c_M, q b_1/a_1, q b_2/a_1, \dots, q b_M/a_1;\\ a_1, q/a_1, a_1/a_2, a_1/a_3, \dots, a_1/a_M, q a_2/a_1, q a_3/a_1, q a_4/a_1, \dots, q a_M/a_1\end{matrix}\right] \times \\ \times {}_M\Psi_M\left[\begin{matrix}q c_1/a_1, q c_2/a_1, \dots, q c_M/a_1; x\\ q b_1/a_1, q b_2/a_1, \dots, q b_M/a_1\end{matrix}\right] + \text{idem } (a_1; a_2, \dots, a_M), \\ \text{where} \\ A = \frac{c_1 c_2 \dots c_M}{a_1 a_2 \dots a_M}, \qquad |x| < 1, \qquad \left|\frac{b_1 b_2 \dots b_M}{c_1 c_2 \dots c_M x}\right| < 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

If we first put $x=\frac{a_1 a_2 \dots a_M}{q c_1 c_2 \dots c_M}$ in (2.1) in order to make the series on the left vanish and then substitute $a_1=q,\ b_2=c_1 b_1/c_2,\ b_3=c_1 b_1/c_3, \dots, b_{M-1}=c_1 b_1/c_{M-1}$, we get the following relation between M nearly-poised series of the type ${}_M\Psi_M$:

$$
(2.2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Pi \begin{bmatrix} q/c_1, q/c_2, \dots, q/c_M, b_1, c_1 b_1/c_2, c_1 b_1/c_3, \dots, c_1 b_1/c_{M-1}, b_M; \\ q/a_2, q/a_3, \dots, q/a_M, a_2, a_3, \dots, a_M \end{bmatrix} \times \\
&\quad \times {}_M\Psi_M \begin{bmatrix} c_1, c_2, \dots, c_{M-1}, c_M; \frac{a_2 a_3 \dots a_M}{c_1 c_2 \dots c_M} \\ b_1, c_1 b_1/c_2, \dots, c_1 b_1/c_{M-1}, b_M \end{bmatrix} \\
&= \Pi \begin{bmatrix} a_2/c_1, a_2/c_2, \dots, a_2/c_M, q b_1/a_2, q c_1 b_1/a_2 c_2, \dots, q c_1 b_1/a_2 c_{M-1}, q b_M/a_2; \\ a_2, q/a_2, a_2/a_3, \dots, a_2/a_M, q a_3/a_2, \dots, q a_M/a_2 \end{bmatrix} \times \\
&\quad \times {}_M\Psi_M \begin{bmatrix} q c_1/a_2, q c_2/a_2, \dots, q c_{M-1}/a_2, q c_M/a_2; \frac{a_2 a_3 \dots a_M}{c_1 c_2 \dots c_M} \\ q b_1/a_2, q c_1 b_1/a_2 c_2, \dots, q c_1 b_1/a_2 c_{M-1}, q b_M/a_2 \end{bmatrix} + \\
&\quad + \text{idem } (a_2; a_3, a_4, \dots, a_M), \\
&\text{where} \\
&\quad \left| \frac{a_2 a_3 \dots a_M}{c_1 c_2 \dots c_M} \right| < 1 \quad \text{and} \quad \left| \frac{b_1^{M-1} \cdot c_1^{M-2} \cdot b_M}{a_2 a_3 \dots a_M c_2 c_3 \dots c_{M-1}} \right| < 1.
\end{aligned}
\right.
$$

Particular cases:

(i) If we put $b_1=q$ in (2.2), we get a relation between a nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the second kind and $(M-1)$ nearly-poised series of the type ${}_M\Psi_M$.

(ii) Again if we put $b_M=a_M$ in (2.2), we get the following relation between $(M-1)$ nearly-poised ${}_M\Psi_M$ series and a nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the first kind:

$$
(2.3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Pi \begin{bmatrix} q/c_1, q/c_2, \dots, q/c_M, b_1, c_1 b_1/c_2, \dots, c_1 b_1/c_{M-1}; \\ q/a_2, q/a_3, \dots, q/a_M, a_2, a_3, \dots, a_{M-1} \end{bmatrix} \times \\
&\quad \times {}_M\Psi_M \begin{bmatrix} c_1, c_2, \dots, c_{M-1}, c_M; \frac{a_2 a_3 \dots a_M}{c_1 c_2 \dots c_M} \\ b_1, c_1 b_1/c_2, \dots, c_1 b_1/c_{M-1}, a_M \end{bmatrix} \\
&= \Pi \begin{bmatrix} a_2/c_1, a_2/c_2, \dots, a_2/c_M, q b_1/a_2, q c_1 b_1/a_2 c_2, \dots, q c_1 b_1/a_2 c_{M-1}; \\ a_2, q/a_2, a_2/a_3, \dots, a_2/a_M, q a_3/a_2, \dots, q a_{M-1}/a_2 \end{bmatrix} \times \\
&\quad \times {}_M\Psi_M \begin{bmatrix} q c_1/a_2, q c_2/a_2, \dots, q c_{M-1}/a_2, q c_M/a_2; \frac{a_2 a_3 \dots a_M}{c_1 c_2 \dots c_M} \\ q b_1/a_2, q c_1 b_1/a_2 c_2, \dots, q c_1 b_1/a_2 c_{M-1}, q a_M/a_2 \end{bmatrix} + \\
&\quad + \text{idem } (a_2; a_3, a_4, \dots, a_{M-1}) +
\end{aligned}
\right.
$$

$$= -\Pi\begin{bmatrix} a_M/c_1, \ldots, a_M/c_M, qb_1/a_M, qc_1b_1/a_Mc_2, \ldots, qc_1b_1/a_Mc_{M-1}, q; \\ a_M, q/a_M, a_M/a_2, \ldots, a_M/a_{M-1}, qa_2/a_M, \ldots, qa_{M-1}/a_M \end{bmatrix} \times$$

$$\times {}_M\Phi_{M-1}\begin{bmatrix} qc_M/a_M, qc_1/a_M, qc_2/a_M, \ldots, qc_{M-1}/a_M; & a_2a_3\ldots a_M \\ & c_1c_2\ldots c_M \\ qb_1/a_M, qc_1b_1/a_Mc_2, \ldots, qc_1b_1/a_Mc_{M-1} & \end{bmatrix},$$

where $\left|\frac{a_2a_3\ldots a_M}{c_1c_2\ldots c_M}\right| < 1$ and $\left|\frac{b_1^{M-1}\cdot c_1^{M-2}}{a_2a_3\ldots a_{M-1}c_2c_3\ldots c_{M-1}}\right| < 1$.

(iii) Now if we put $c_M = 1$, after reversing the ${}_M\Psi_M$ series on the left of (2.3), we get a relation between two ${}_M\Phi_{M-1}$ nearly poised series of the first kind and $(M-2)$ nearly-poised ${}_M\Psi_M$ series.

(iv) Again if we put $b_1 = q$, $c_2 = qc_1/a_2$, $c_3 = qc_1/a_3$, ..., $c_{M-1} = qc_1/a_{M-1}$ in (2.2), we get a relation between $(M-1)$ nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the second kind and a nearly-poised series of the type ${}_M\Psi_M$.

(v) If we put $a_2 = c_1b_1/c_2$, $a_3 = c_1b_1/c_3$, ..., $a_{M-1} = c_1b_1/c_{M-1}$ and $a_M = b_M$ in (2.2), we get a relation between a nearly-poised ${}_M\Psi_M$ series, $(M-2)$ nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the second kind and a nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the first kind.

If should be noted that if we put $b_M = a_M$ in the particular case (iv) we get a relation between $(M-1)$ nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the second kind and a nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the first kind; also, if we put $a_2 = c_1b_1/c_2$, $a_3 = c_1b_1/c_3$, ..., $a_{M-1} = c_1b_1/c_{M-1}$ in the particular case (iii), we shall get a relation involving $(M-2)$ nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the second kind and two nearly poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the first kind.

(vi) Now if we first reverse the ${}_M\Psi_M$ series in the particular case (iv) and then put $a_M = qc_1$ in it, we get the following relation between M nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the second kind:

$$\Pi\begin{bmatrix} q/c_1, q/c_2, \ldots, q/c_M, b_M, q; \\ c_2/c_1, \ldots, c_{M-1}/c_1, 1/c_1, qc_1 \end{bmatrix} {}_M\Phi_{M-1}\begin{bmatrix} c_1, c_2, \ldots, c_{M-1}, c_M; & \frac{q^{M-1}\cdot c_1^{M-2}}{c_M(c_2c_3\ldots c_{M-1})^2} \\ qc_1/c_2, \ldots, qc_1/c_{M-1}, b_M & \end{bmatrix}$$

$$= \Pi\begin{bmatrix} q/c_2, qc_1/c_2^2, qc_1/c_2c_3, \ldots, qc_1/c_2c_M, qc_2/c_1, b_Mc_2/c_1, q; \\ qc_1/c_2, c_3/c_2, \ldots, c_{M-1}/c_2, 1/c_2, c_2/c_1, qc_2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times {}_M\Phi_{M-1}\begin{bmatrix} c_2^2/c_1, c_2, c_2c_3/c_1, \ldots, c_2c_{M-1}/c_1, c_2c_M/c_1; & \frac{q^{M-1}\cdot c_1^{M-2}}{c_M(c_2c_3\ldots c_{M-1})^2} \\ qc_2/c_1, qc_2/c_3, \ldots, qc_2/c_{M-1}, c_2b_M/c_1 & \end{bmatrix} + \quad (2.4)$$

$$+ \text{idem}\,(c_2; c_3, c_4, \ldots, c_{M-1}) +$$

$$+ \Pi\begin{bmatrix} q, qc_1/c_2, qc_1/c_3, \ldots, qc_1/c_M, q/c_1, b_M/c_1; \\ qc_1, c_2, c_3, \ldots, c_{M-1}, 1/c_1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times {}_M\Phi_{M-1}\begin{bmatrix} c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{M-1}, qc_1/b_M; & \frac{b_M}{c_1} \\ qc_1/c_2, qc_1/c_3, \ldots, qc_1/c_{M-1}, qc_1/c_M & \end{bmatrix}$$

where $\left|\frac{q^{M-1}\cdot c_1^{M-2}}{c_M(c_2c_3\ldots c_{M-1})^2}\right| < 1$ and $\left|\frac{b_M}{c_1}\right| < 1$.

(vii) Again if we put $a_2 = c_1 b_1/c_2$, and then put $c_2^2 = q c_1 b_1$ in (2.2), we get the following relation between $(M-1)$ nearly-poised series of the type ${}_M\Psi_M$.

$$
(2.5)\quad \begin{cases} \Pi\left[\begin{matrix} q^2 b_1/c_2^2, q/c_2, \ldots, q/c_M, b_1, c_2^2/q c_3, \ldots, c_2^2/q c_{M-1}, b_M; \\ q^2/c_2, q/a_3, \ldots, q/a_M, a_3, a_4, \ldots, a_M \end{matrix}\right] \times \\ \quad \times {}_M\Psi_M\left[\begin{matrix} c_2^2/q b_1, c_2, c_3, \ldots, c_{M-1}, c_M; \ \frac{b_1 a_3 a_4 \ldots a_M}{c_2^2 c_3 c_4 \ldots c_M} \\ b_1, c_2/q, c_2^2/q c_3, \ldots, c_2^2/q c_{M-1}, b_M \end{matrix}\right] \\ = \Pi\left[\begin{matrix} q a_3 b_1/c_2^2, a_3/c_2, \ldots, a_3/c_M, q b_1/a_3, c_2^2/a_3 c_3, \ldots, c_2^2/a_3 c_{M-1}, q b_M/a_3; \\ a_3, q/a_3, q a_3/c_2, a_3/a_4, \ldots, a_3/a_M, q a_4/a_3, \ldots, q a_M/a_3 \end{matrix}\right] \times \\ \quad \times {}_M\Psi_M\left[\begin{matrix} c_2^2/b_1 a_3, q c_2/a_3, q c_3/a_3, \ldots, q c_{M-1}/a_3, q c_M/a_3; \ \frac{b_1 a_3 a_4 \ldots a_M}{c_2^2 c_3 c_4 \ldots c_M} \\ q b_1/a_3, c_2/a_3, c_2^2/a_3 c_3, \ldots, c_2^2/a_3 c_{M-1}, q b_M/a_3 \end{matrix}\right] + \\ \quad + \text{idem}\,(a_3; a_4, a_5, \ldots, a_M), \\ \text{where} \\ \quad \left|\frac{b_1 a_3 a_4 \ldots a_M}{c_2^2 c_3 c_4 \ldots c_M}\right| < 1 \quad \text{and} \quad \left|\frac{b_1 \cdot c_2^{2M-6} \cdot b_M}{q^{M-3} a_3 a_4 \ldots a_M c_3 c_4 \ldots c_{M-1}}\right| < 1. \end{cases}
$$

If we put $c_M = 1$, after reversing the first ${}_M\Psi_M$ series in (2.5), we shall get a relation between a nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the first kind and $(M-2)$ nearly-poised ${}_M\Psi_M$ series and also if we put $a_M = b_M$ in it, we get a relation between two nearly-poised ${}_M\Phi_{M-1}$ series of the first kind and $(M-3)$ nearly-poised ${}_M\Psi_M$ series.

(viii) If we let $q \to 1$ in (2.2) in the usual manner, we get a relation between M nearly-poised ordinary bilateral hypergeometric series of the type ${}_M H_M$ and corresponding particular cases for ordinary bilateral hypergeometric series can be either deduced directly from it or as limiting cases of the basic results.

3. So far we have found relations involving nearly-poised series only and if we make substitutions similar to those which we have made to derive (2.2) in (2.1), we shall again get a relation involving $(M+1)$ nearly-poised series, but in this section I find certain relations involving well-poised and nearly-poised series.

If we put $M = 5$, $c_1 = a q^{-N}$, $c_2 = b$, $c_3 = c$, $c_4 = d q^N$, $c_5 = q^{-N}$, $b_1 = q^{1+N}$, $b_2 = a q/b$, $b_3 = a q/c$, $b_4 = a q^{1-N}/d$, $b_5 = a^2 q^{-N}/k^2$ and $x = q$, where $k = a^2 q/bcd$ and N is a positive integer, in (2.1) we get the following relation between a nearly-poised ${}_5\Psi_5$ series terminating at both ends and five nearly-poised non-terminating ${}_5\Psi_5$ series:

$$
(3.1)\quad \begin{cases} \Pi\left[\begin{matrix} A q, 1/A, q^{1+N}, a q/b, a q/c, a q^{1-N}/d, a^2 q^{-N}/k^2, q^{N+1}/a, q/b, q/c, q^{1-N}/d, q^{1+N}; \\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, q/a_1, q/a_2, q/a_3, q/a_4, q/a_5 \end{matrix}\right] \times \\ \quad \times {}_5\Psi_5\left[\begin{matrix} a q^{-N}, b, c, d q^N, q^{-N}; \ q \\ q^{N+1}, a q/b, a q/c, a q^{1-N}/d, a^2 q^{-N}/k^2 \end{matrix}\right] \\ = \frac{q}{a_1} \Pi\left[\begin{matrix} a_1 A, q/A a_1, a_1 q^N/a, a_1/b, a_1/c, a_1 q^{-N}/d, a_1 q^N, q^{2+N}/a_1, q^2 a/b a_1, q^2 a/c a_1, \\ q^{2-N} a/d a_1, q^{1-N} a^2/k^2 a_1; \\ a_1, q/a_1, a_1/a_2, a_1/a_3, a_1/a_4, a_1/a_5, q a_2/a_1, q a_3/a_1, q a_4/a_1, q a_5/a_1 \end{matrix}\right] \times \end{cases}
$$

$$\times {}_5\Psi_5\left[\begin{matrix} q^{1-N}a/a_1, qb/a_1, qc/a_1, q^{1+N}d/a_1, q^{1-N}/a_1; & q \\ q^{2+N}/a_1, aq^2/a_1b, aq^2/a_1c, q^{2-N}a/da_1, q^{1-N}a^2/k^2a_1 & \end{matrix}\right] +$$
$$+ \text{idem}\,(a_1; a_2, a_3, a_4, a_5),$$
where
$$k = a^2q/bcd \quad \text{and} \quad A = abcdq^{-N}/a_1a_2a_3a_4a_5.$$

Last year I [5] gave the following transformation which expresses a nearly-poised ${}_5\Psi_5$ series in terms of a well-poised ${}_{12}\Psi_{12}$ series[1]):

$$(3.2)\quad \begin{cases} {}_5\Psi_5\left[\begin{matrix} aq^{-N}, b, c, dq^N, q^{-N}; & q \\ q^{1+N}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, a^2q^{-N}/k^2 & \end{matrix}\right] \\ = \dfrac{(kq/a;N)\,(k^2q/a;N)\,(kd/a;N)\,(q/a;N)\,(aq/kb;N)\,(aq/kc;N)}{(kq;N)\,(k^2q/a^2;N)\,(d;N)\,(q/k;N)\,(q/b;N)\,(q/c;N)} \times \\ \times {}_{12}\Psi_{12}\left[\begin{matrix} kq^{-N}, q\sqrt{k}, -q\sqrt{k}, kb/a, kc/a, kdq^N/a, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, \sqrt{aq}, -\sqrt{aq}, & \\ & k^2q^{1+N}/a, q^{-N}; \ q \\ q^{N+1}, \sqrt{k}, -\sqrt{k}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, kq/\sqrt{a}, -kq/\sqrt{a}, k\sqrt{q/a}, & \\ & -k\sqrt{q/a}, aq^{-N}/k, kq^{N+1} \end{matrix}\right] \\ \text{where} \\ k = a^2q/bcd. \end{cases}$$

Now by using (3.2) in (3.1), we get the following relation between a well-poised ${}_{12}\Psi_{12}$ and five nearly-poised ${}_5\Psi_5$ series:

$$(3.3)\quad \begin{cases} \Pi\left[\begin{matrix} Aq, 1/A, q^{1+N}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, a^2q^{-N}/k^2, q^{N+1}/a, q/b, q/c, & \\ & q^{1-N}/d, q^{1+N}; \\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, q/a_1, q/a_2, q/a_3, q/a_4, q/a_5 & \end{matrix}\right] \times \\ \times \dfrac{(kq/a;N)\,(k^2q/a;N)\,(kd/a;N)\,(q/a;N)\,(aq/kb;N)\,(aq/kc;N)}{(kq;N)\,(k^2q/a^2;N)\,(d;N)\,(q/k;N)\,(q/b;N)\,(q/c;N)} \times \\ \times {}_{12}\Psi_{12}\left[\begin{matrix} kq^{-N}, q\sqrt{k}, -q\sqrt{k}, kb/a, kc/a, kdq^N/a, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, \sqrt{aq}, -\sqrt{aq}, & \\ & k^2q^{N+1}/a, q^{-N}; \ q \\ q^{N+1}, \sqrt{k}, -\sqrt{k}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, kq/\sqrt{a}, -kq/\sqrt{a}, k\sqrt{q/a}, & \\ & -k\sqrt{q/a}, aq^{-N}/k, kq^{N+1} \end{matrix}\right] \\ = \dfrac{q}{a_1}\Pi\left[\begin{matrix} a_1A, q/Aa_1, a_1q^N/a, a_1/b, a_1/c, a_1q^{-N}/d, a_1q^N, q^{2+N}/a_1, aq^2/ba_1, & \\ & aq^2/ca_1, q^{2-N}a/da_1, q^{1-N}a^2/k^2a_1; \\ a_1, q/a_1, a_1/a_2, a_1/a_3, a_1/a_4, a_1/a_5, qa_2/a_1, qa_3/a_1, qa_4/a_1, qa_5/a_1 & \end{matrix}\right] \times \\ \times {}_5\Psi_5\left[\begin{matrix} q^{1-N}a/a_1, qb/a_1, qc/a_1, q^{1+N}d/a_1, q^{1-N}/a_1; & q \\ q^{2+N}/a_1, aq^2/a_1b, aq^2/a_1c, q^{2-N}a/da_1, q^{1-N}a^2/k^2a_1 & \end{matrix}\right] + \\ + \text{idem}\,(a_1; a_2, a_3, a_4, a_5) \\ \text{where} \quad k = a^2q/bcd \quad \text{and} \quad A = abcdq^{-N}/a_1a_2a_3a_4a_5. \end{cases}$$

If we put $a_1 = q$ in (3.3), the last four ${}_5\Psi_5$ series on the right of (3.3) vanish and we again get (3.2). Hence (3.3) is a generalization of (3.2).

Also if we put $d = aq^{-N}$ in (3.3), we get a relation between a well-poised ${}_{12}\Phi_{11}$ and five nearly-poised ${}_5\Psi_5$ series and if we put $a_1 = q$ in it, we get the

[1]) Transformations (3.2) and (3.4) given in [5] have been further generalized by me.

transformation of a nearly-poised Saalschützian ${}_5\Phi_4$ series into a well-poised ${}_{12}\Phi_{11}$ series given by BAILEY [2], when $dq^N=a$.

Again if we put $M=7$, $c_1=aq^{-N}$, $c_2=q\sqrt{a}$, $c_3=-q\sqrt{a}$, $c_4=b$, $c_5=c$, $c_6=dq^N$, $c_7=q^{-N}$, $b_1=q^{1+N}$, $b_2=\sqrt{a}$, $b_3=-\sqrt{a}$, $b_4=aq/b$, $b_5=aq/c$, $b_6=aq^{1-N}/d$, $b_7=a^2q^{2-N}/k^2$ and $x=q$ in (2.1) where $k=a^2q/bcd$, we get a relation between a nearly-poised ${}_7\Psi_7$ terminating at both ends and seven non-terminating nearly-poised ${}_7\Psi_7$ series. Now we use in it the following transformation, which expresses a nearly-poised ${}_7\Psi_7$ series in terms of a well-poised ${}_{12}\Psi_{12}$ series, deduced by me [5]

$$
(3.4)\quad \left\{\begin{aligned}
&{}_7\Psi_7\left[\begin{matrix} aq^{-N}, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, b, c, dq^N, q^{-N}; \\ q^{1+N}, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, a^2q^{2-N}/k^2 \end{matrix}\ q\right]\\
&=\frac{(1-k^2q^{2N-1}/a)\,(k/aq;N)\,(k^2/a;N-1)\,(kd/a;N)\,(aq/kb;N)\,(aq/kc;N)\,(q/a;N)}{(kq;N)\,(k^2/a^2q;N)\,(d;N)\,(q/b;N)\,(q/c;N)\,(q/k;N)}\times\\
&\times{}_{12}\Psi_{12}\left[\begin{matrix} kq^{-N}, q\sqrt{k}, -q\sqrt{k}, kb/a, kc/a, kdq^N/a, \sqrt{aq}, -\sqrt{aq}, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, \\ q^{N+1}, \sqrt{k}, -\sqrt{k}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, k\sqrt{q/a}, -k\sqrt{q/a}, k/\sqrt{a}, \end{matrix}\right.\\
&\qquad\left.\begin{matrix} k^2q^{N-1}/a, q^{-N}; q \\ -k/\sqrt{a}, aq^{2-N}/k, kq^{N+1} \end{matrix}\right]\\
&\text{where}\qquad k=a^2q/bcd.
\end{aligned}\right.
$$

Then we get the following relation between a well-poised ${}_{12}\Psi_{12}$ and seven nearly-poised ${}_7\Psi_7$ series:

$$
(3.5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Pi\left[\begin{matrix} qA, 1/A, q^{1+N}, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, a^2q^{2-N}/k^2, q^{1+N}/a, \\ 1/\sqrt{a}, -1/\sqrt{a}, q/b, q/c, q^{1-N}/d, q^{1+N}; \\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, q/a_1, q/a_2, q/a_3, q/a_4, q/a_5, q/a_6, q/a_7 \end{matrix}\ q\right]\times\\
&\times\frac{(1-k^2q^{2N-1}/a)\,(k/aq;N)\,(k^2/a;N-1)\,(kd/a;N)\,(aq/kb;N)\,(aq/kc;N)\,(q/a;N)}{(kq;N)\,(k^2/a^2q;N)\,(d;N)\,(q/b;N)\,(q/c;N)\,(q/k;N)}\times\\
&\times{}_{12}\Psi_{12}\left[\begin{matrix} kq^{-N}, q\sqrt{k}, -q\sqrt{k}, kb/a, kc/a, kdq^N/a, \sqrt{aq}, -\sqrt{aq}, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, \\ q^{N+1}, \sqrt{k}, -\sqrt{k}, aq/b, aq/c, aq^{1-N}/d, k\sqrt{q/a}, -k\sqrt{q/a}, k/\sqrt{a}, \end{matrix}\right.\\
&\qquad\left.\begin{matrix} k^2q^{N-1}/a, q^{-N}; q \\ -k/\sqrt{a}, aq^{2-N}/k, kq^{N+1} \end{matrix}\right]\\
&=\frac{q}{a_1}\Pi\left[\begin{matrix} a_1A, q/Aa_1, a_1q^N/a, a_1/q\sqrt{a}, -a_1/q\sqrt{a}, a_1/b, a_1/c, a_1q^{-N}/d, a_1q^N, \\ q^{2+N}/a_1, q\sqrt{a}/a_1, -q\sqrt{a}/a_1, aq^2/ba_1, aq^2/ca_1, q^{2-N}a/da_1, \\ a_1, q/a_1, a_1/a_2, a_1/a_3, a_1/a_4, a_1/a_5, a_1/a_6, a_1/a_7, qa_2/a_1, qa_3/a_1, \end{matrix}\right.\\
&\qquad\left.\begin{matrix} q^{3-N}a^2/k^2a_1; \\ qa_4/a_1, qa_5/a_1, qa_6/a_1, qa_7/a_1 \end{matrix}\ q\right]\times\\
&\times{}_7\Psi_7\left[\begin{matrix} q^{1-N}a/a_1, q^2\sqrt{a}/a_1, -q^2\sqrt{a}/a_1, qb/a_1, qc/a_1, q^{1+N}d/a_1, q^{1-N}/a_1; \\ q^{2+N}/a_1, q\sqrt{a}/a_1, -q\sqrt{a}/a_1, aq^2/ba_1, aq^2/ca_1, aq^{2-N}/da_1, \end{matrix}\ q\right]+\\
&\qquad\left.\begin{matrix} \\ a^2q^{3-N}/k^2a_1 \end{matrix}\right]\\
&+\text{idem}\,(a_1; a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)\\
&\text{where}\qquad k=a^2q/bcd \qquad\text{and}\qquad A=-a^2bcdq^{2-N}/a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7.
\end{aligned}\right.
$$

If we put $a_1 = q$ in (3.5), the last six ${}_7\Psi_7$ series on the right of it vanish and again we get (3.4). Hence (3.5) generalizes (3.4).

Also if we put $dq^N = a$ in (3.5), we get a relation between a well-poised ${}_{12}\Phi_{11}$ and seven nearly-poised ${}_7\Psi_7$ series and if we put $a_1 = q$, we get a relation between a well-poised ${}_{12}\Phi_{11}$ series, and a nearly-poised ${}_7\Phi_6$ series given by BAILEY [3], when $dq^N = a$.

4. *The sum of a nearly-poised* ${}_3\Psi_3$. If we put $M = 3$ and $b_1 = q$ in (2.5), we get the following relation between a nearly-poised ${}_3\Psi_3$ and a nearly-poised ${}_3\Phi_2$ series of the second kind:

$$(4.1)\quad {}_3\Psi_3\left[\begin{matrix} c_2^2/q a_3, q c_2/a_3, q c_3/a_3; & q a_3 \\ q^2/a_3, c_2/a_3, q b_3/a_3 & c_2^2 c_3 \end{matrix}\right] = \Pi\left[\begin{matrix} q^3/c_2^2, q/c_2, q/c_3, q, b_3, q a_3/c_2; \\ q^2/c_2, q^2 a_3/c_2^2, q b_3/a_3, a_3/c_2, a_3/c_3, q^2/a_3 \end{matrix}\right] {}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} c_2^2/q^2, c_2, c_3; & q a_3 \\ c_2/q, b_3 & c_2^2 c_3 \end{matrix}\right].$$

If we put $c_3 = 1$ in (4.1), we get,

$$(4.2)\quad {}_3\Psi_3\left[\begin{matrix} c_2^2/q a_3, q c_2/a_3, q/a_3; & q a_3 \\ q^2/a_3, c_2/a_3, q b_3/a_3 & c_2^2 \end{matrix}\right] = \Pi\left[\begin{matrix} q^3/c_2^2, q/c_2, q, q, b_3, q a_3/c_2; \\ q^2/c_2, q^2 a_3/c_2^2, q b_3/a_3, a_3/c_2, a_3, q^2/a_3 \end{matrix}\right].$$

If we put $a_3 = b_3$ in (4.2), we get the sum of a nearly-poised ${}_3\Phi_2$ series which is the basic analogue of a particular case of (2) of § 6.4 of the Tract [1].

It should be noted that if we let $q \to 1$ in (2.5) after putting $M = 3$, in the usual manner and then put $a_3 = b_3$, the ${}_3F_2$ series in it becomes summable and we get the sum of nearly-poised ${}_3H_3$ series.

5. *Conclusion.* So far relations between particular basic bilateral nearly-poised and well-poised series terminating at both ends only are known to us. We do not know relations either between basic non-terminating nearly-poised and well-poised series excepting one due to SEARS or nearly-poised and Saalschützian series, though a few relations between terminating nearly-poised and well-poised basic series have been deduced by BAILEY. But in the case of ordinary hypergeometric series several relatins of non-terominating nearly-poised series are known to us. So by giving particular values to M in the particular case (viii) of Section 2 and making use of known transformations of nearly-poised series, we can find out several interesting transformations of bilateral nearly-poised series; these special transformation form the subject matter of another paper of mine which I soon intend to publish.

I am grateful to Dr. R. P. AGARWAL for his kind guidance during the preparation of this paper.

References

[1] BAILEY, W. N.: On generalized hypergeometric series. Cambridge Tract. (1935). — [2] BAILEY, W. N.: Some identities in combinatory analysis. Proc. London Math. Soc. (2) **49**, 421—435 (1947). — [3] BAILEY, W. N.: A transformation of nearly-poised basic hypergeometric series. J. London Math. Soc. **22**, 237—240 (1947). — [4] SLATER, L. J.: General transformations of bilateral series. Quart. J. Math. (2) **3**, 73—80 (1952). — [5] SHUKLA, H. S.: Certain transformations of nearly-poised bilateral hypergemetric series. Ganita, **7**, 113—121 (1956).

Dept. of Math., The University, Lucknow (India)

(Eingegangen am 24. Juli 1957)

HARTMAN, P.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 202–210 (1958)

On Isometries and on a Theorem of Liouville*)

By

PHILIP HARTMAN

In this paper, it is shown that LIOUVILLE's theorem [Theorem (III)] on conformal mappings of space is valid for (local) transformations of class C^1. This is deduced by a procedure used to prove Theorem (I) dealing with the smoothness of solutions of overdetermined systems of partial differential equations. This procedure depends on the notion of strong L^2-derivatives. A particular case of Theorem (I) implies that if two non-singular Riemann metrics of class C^σ, where $\sigma = 1, 2, \ldots$, are isometric by virtue of a mapping of class C^1, then the mapping is necessarily of class $C^{1+\sigma}$; Theorem (II).

1. Overdetermined systems. The first theorem of this paper concerns smoothness properties of solutions of overdetermined systems of partial differential equations.

(I) *Let $u = (u^1, \ldots, u^d)$ and $v = (v^1, \ldots, v^\delta)$. Let $f^I(u, v, v^1_1, v^1_2, \ldots, v^\delta_d)$, where $I = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}d(d+1)$, be functions of class C^σ, $\sigma \geqq 1$, on a $(d + \delta + d^2)$-dimensional domain. Let $v = v(u)$ be of class C^1 and satisfy the system of partial differential equations*

$$f^I(u, v, \partial v^1/\partial u^1, \ldots, \partial v^\delta/\partial u^d) = 0, \qquad \text{where } I = 1, \ldots, \tfrac{1}{2}d(d+1), \tag{1}$$

on some u-domain. In addition, let

$$\Delta(u) \neq 0, \tag{2}$$

where $\Delta(u)$ is the determinant of the matrix of coefficients of $\partial^2 v^i/\partial u^j \partial u^k$ in the system of $\frac{1}{2}d^2(d+1)$ linear equations obtained by differentiating (1) formally with respect to u^k, $k = 1, \ldots, d$, and assuming $\partial^2 v^i/\partial u^j \partial u^k = \partial^2 v^i/\partial u^k \partial u^j$. Then $v = v(u)$ is of class $C^{1+\sigma}$.

This theorem (with $d = 2$) was proved in [4] under the stronger assumption that $v = v(u)$ is of class C^2 (instead of class C^1). The question as to whether or not the above form of (I) is true was left open.

The proof of (I) below will depend on properties of functions having a finite "modified Dirichlet integral" in which partial derivatives are replaced by difference quotients. Essentially, (I) will first be proved in an L^2-sense for the case $\sigma = 1$.

It will be clear from the proof of (I) that an analogue holds if u and v are vectors of different dimensions, say, u is a d'-vector and v is a d-vector.

*) The preparation of this paper was sponsored in part by the Office of Naval Research, U. S. Navy. Reproduction in whole or in part is permitted for any purpose of the United States Government.

In this case, the system (1) of $\frac{1}{2}d(d+1)$ equations must be replaced by a system of $[\frac{1}{2}d(d'+1)+\frac{1}{2}]$ equations and condition (2) must be replaced by the assumption that the rank of the corresponding $d'[\frac{1}{2}d(d'+1)+\frac{1}{2}]$ by $\frac{1}{2}dd'(d'+1)$ matrix of coefficients of the $\frac{1}{2}dd'(d'+1)$ variables $\partial^2 v^i/\partial u^j \partial u^k = \partial^2 v^i/\partial u^k \partial u^j$ is $\frac{1}{2}dd'(d'+1)$ at every point u under consideration.

2. Isometries. It is clear from [4] that (I) has applications in differential geometry (and, in some cases, leads to refinements of the assertions in [4]). In particular, the considerations of [4] indicate that (I) has the following corollary (cf. Section 8 below):

(II) *Let* $u=(u^1,\ldots,u^d)$, $v=(v^1,\ldots,v^d)$. *Let* $(g_{ik}(u))$, $(h_{ik}(v))$ *be non-singular, symmetric matrices of class* C^σ *in vicinities of* $u=0$, $v=0$, *respectively. Let* $v=v(u)$ *be a mapping of class* C^1 *in a vicinity of* $u=0$ *satisfying* $v(0)=0$ *and transforming the Riemannian metric*

$$ds^2 = g_{ik}\,du^i\,du^k \tag{3}$$

into

$$ds^2 = h_{ik}\,dv^i\,dv^k. \tag{4}$$

Then $v=v(u)$ *is of class* $C^{1+\sigma}$.

If $\sigma=0$, this theorem is trivial. If $\sigma\geqq 1$ and if $v=v(u)$ is of class C^2 (instead of class C^1), then (II) follows from the transformation rules for the Christoffel symbols. For these rules show that the second order partial derivatives of v^i can be expressed as polynomials in g^{ik}, h^{ik} and the first order partial derivatives of v^i, g_{ijk} and h_{ijk}.

Using the theory of geodesics and parallel transport, (II) was proved in [3], pp. 222—226, in the binary ($d=2$), positive definite case. In [5], (II) was proved for $d=2$ without the assumption that (3) is a positive definite metric. The proof in [5] is not applicable to the case of d (>2) dimensions; for example, in the positive definite case, it depends on the Cauchy-Riemann equations.

3. Liouville's theorem. Theorem (II) and the arguments used in the proof of (I) will be used to obtain the following form of Liouville's theorem.

(III) *Let* $d\geqq 3$, $u=(u^1,\ldots,u^d)$, $v=(v^1,\ldots,v^d)$. *Let* $v=v(u)$ *be a (local) mapping of class* C^1 *with non-vanishing Jacobian which maps the Euclidean metric*

$$ds^2 = (dv^1)^2+\cdots+(dv^d)^2 \tag{5}$$

into a conformal metric

$$ds^2 = \gamma^2[(du^1)^2+\cdots+(du^d)^2], \qquad \text{where } \gamma=\gamma(u)>0. \tag{6}$$

Then $v=v(u)$ *is a Möbius transformation (hence, analytic).*

The proofs of Liouville's theorem in standard texts require that $v=v(u)$ is of class C^3. A proof in which it is only assumed that $v=v(u)$ is of class C^2 is given in [2]. In (III), there is, of course, no assumption on the smoothness of γ; if γ is assumed to be of class C^1, then (III) follows from [2] and (II).

4. Two lemmas. The proofs of (I), (II), (III) will depend on two simple lemmas. The first is a consequence of a result of SÓLYI [8]. The second is obtained by a crude variation of arguments of MORREY [6] dealing with quasi-conformal maps and generalizations of these arguments by NIRENBERG [7].

The following notation will be used below: The range of a lower case index is to 1 to d, that of I is 1 to $\frac{1}{2}d(d+1)$. Repeated indices denote summation. When there is no possibility for confusion, partial differentiation with respect to the i-th component u^i of u will be denoted by the subscript i. If $g=g(u)$ is of class C^1 on a u-domain R, the Dirichlet integral of g over R will be denoted by $I_R(g)$,

$$I_R(g)=\sum_{i=1}^{d}\int_R |g_i(u)|^2\,du,$$

where $du=du^1\dots du^d$. If $g(u)$ is continuous on a domain containing the closure of R, then, for small $|h|>0$, $I_{Rh}(g)$ will denote the modified Dirichlet integral

$$I_{Rh}(g)=h^{-2}\sum_{i=1}^{d}\int_R |\Delta_i g|^2\,du, \tag{7}$$

where Δ_i denotes the difference operator

$$\Delta_i g=g(u^1,\dots,u^{i-1},u^i+h,u^{i+1},\dots,u^d)-g(u^1,\dots,u^d). \tag{8}$$

The following is implied by SÓLYI's paper [8] (cf. Section 5 below):

Lemma 1. *Let $g=g(u)$ be a continuous function on a domain containing the closure of a sphere T. Let there exist a constant K satisfying*

$$I_{Th}(g)\leq K \tag{9}$$

for small $|h|>0$. Then $g(u)$ has strong L^2-derivatives on compact subsets of T.

In particular, the partial derivatives $g_k(u)$, $k=1,\dots,d$, exist almost everywhere on T. Below, this lemma will be applied to the components $g=v_j^i(u)$ of $v_j=\partial v/\partial v^j$. It will follow that v^i has second order partial derivatives $v_{jk}^i=v_{kj}^i$ almost everywhere and that if $f(u,v,v_1^1,\dots,v_d^d)$ is of class C^1 in its $d+d+d^2$ variables, then $f\big(u,v(u),v_1^1(u),\dots,v_d^d(u)\big)$ can be differentiated by the chain rule almost everywhere with respect to u^k, $k=1,\dots,d$.

Lemma 2. *Let $z=z(u)=\big(z^1(u),\dots,z^d(u)\big)$ be a vector function of class C^1 on a bounded u-domain R. Let there exist constants C_1, C_2, C_{ijkm} such that $|z^i(u)|\leq C_1$ and*

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}|z_j^i|^2\leq C_{ijkm}\,\partial(z^i,z^j)/\partial(u^k,u^m)+C_2. \tag{10}$$

Then, for any compact subset T of R, there exists a constant K, depending only on R, T, C_1, C_2, C_{ijkm}, such that the Dirichlet integrals of z^j satisfy

$$\sum_{j=1}^{d}I_T(z^j)\leq K. \tag{11}$$

5. Proof of Lemma 1. In order to make clear the meaning of "strong L^2-derivatives" and the validity of the remarks following Lemma 1, a verification of Lemma 1 will be indicated.

In this verification, there is no loss of generality in supposing that $g(u^1, \ldots, u^d)$ is of period 2π in each variable u^j and that (9) holds for the parallelopiped T: $|u^j| \leq \pi$; [8], pp. 53—54. Let $g(u)$ have the Fourier development

$$g(u) \sim \sum a_n e^{in \cdot u},$$

where $n = (n_1, \ldots, n_d)$, $n \cdot u = n_1 u^1 + \cdots + n_d u^d$ and $n_j = 0, \pm 1, \ldots$. Let $g^N(u)$ denote the (finite) Fejér sum

$$g^N(u) = \sum (1 - |n_1|/N) \ldots (1 - |n_d|/N) a_n e^{in \cdot u}, \qquad \text{where } |n_j| < N.$$

The inequality (9) implies the convergence of the d-fold series

$$\sum |a_n|^2 |n|^2 = \sum |a_n|^2 (n_1^2 + \cdots + n_d^2) < \infty;$$

[8], pp. 49—50.

From the continuity of g, it follows by Fejer's theorem that $g^N \to g$ uniformly as $N \to \infty$. Finally, from the last formula line, it follows that, for $j = 1, \ldots, d$, the sequence $\partial g^1/\partial u^j, \partial g^2/\partial u^j, \ldots$ converges in the L^2-mean on T: $|u^k| \leq \pi$, to

$$g_j \sim \sum i n_j a_n e^{in \cdot u}.$$

6. Proof of Lemma 2. Without loss of generality, it can be supposed that T is a sphere, say $|u| \leq a$, and that R contains the slightly larger sphere $T(\theta)$: $|u| \leq a/\theta$, where θ is a fixed number on the range $0 < \theta < 1$. Let $e(r)$ be a non-negative function of class C^∞ for $r \geq 0$ satisfying $e = 1$ for $0 \leq r \leq a$ and $e = 0$ for $r \geq \frac{1}{2}(a + a/\theta)$.

An integration by parts gives

$$\int_{T(\theta)} e^2(r) (z_k^i z_m^j - z_m^i z_k^j) \, du = -2 \int_{T(\theta)} e e' z^i (z_m^j r_k - z_k^j r_m) \, du,$$

where $r = |u|$ and $e' = de/dr$. This integration by parts is valid even though z is only of class C^1 (rather, than of class C^2).

If $\varepsilon > 0$, then the absolute value of the last integral is majorized by

$$\varepsilon \int_{T(\theta)} e^2 (|z_m^j|^2 + |z_k^j|^2) \, du + \varepsilon^{-1} C_1^2 \int_{T(\theta)} e'^2(r) \, du,$$

since $|ab| \leq \frac{1}{2}\varepsilon a^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1} b^2$, $|z^i| \leq C_1$ and $|r_k|, |r_m| \leq 1$. Thus (10) implies that

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \int_{T(\theta)} e^2 |z_j^i|^2 \, du \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{d} |C_{ijkm}| \int_{T(\theta)} e^2 (|z_m^j|^2 + |z_k^j|^2) \, du + \tfrac{1}{2} K,$$

where K is a constant depending only on $C_1, C_2, C_{ijkm}, \varepsilon, R, T$ and the function $e(r)$. Hence if ε is chosen so small that $2d^2 \varepsilon |C_{ijkm}| \leq \frac{1}{2}$, then

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \int_{T(\theta)} e^2 |z_j^k|^2 \, du \leq K.$$

Since $e \geq 0$ for $r \geq 0$ and $e = 1$ for $r \leq a$, the inequality (11) follows.

7. Proof of (I). Consider first the case $\sigma = 1$. In view of the local nature of the assertion of (I), it is sufficient to prove it for a vicinity of a given point, say $u = 0$, in the domain of definition of $v = v(u)$.

Let i be a fixed integer, $1 \leq i \leq d$, and h be a number such that $|h| > 0$ is small. Put

$$z = h^{-1} \Delta_i v, \tag{12}$$

where Δ_i is the difference operator defined in (8). Thus $z = z(u, h) = (z^1, \ldots, z^d)$ is a vector function of class C^1 for small $|u|$ and $|h| > 0$. It is a continuous function, even for $h = 0$, if $z(u, 0)$ is defined to be $\partial v / \partial u^i$.

Apply the difference operator $h^{-1}\Delta_i$ to the equation (1). By the mean value theorem of differential calculus, the result can be written as

$$(\partial f^I / \partial u^i)_0 + (\partial f^I / \partial v^j)_0 z^j + (\partial f^I / \partial v^j_n)_0 z^j_n = 0,$$

where the subscript 0 means that the partial derivative is evaluated at a suitable intermediary point. By virtue of the continuity assumptions, the last equation can be written as

$$d^{I\,n}_j z^j_n = \sum_{j=1}^{d} \sum_{n=1}^{d} o(1) |z^j_n| + g^I(u, h), \tag{13}$$

where $d^{I\,n}_j$ is the value of $\partial f^I / \partial v^j_n$ at the point $(u, v, v^1_1, \ldots, v^d_d) = (0, v(0), v^1_1(0), \ldots, v^d_d(0))$; $o(1)$ refers to $|u| \to 0$ and $0 < |h| \to 0$; and $g^I(u, h)$ denotes a continuous function for small $|u|, |h|$ (≥ 0).

Multiply (13) by z^k_m and write the resulting equation in the form

$$\sum_{j=1}^{d} \Big[\sum_{n=1}^{m} d^{I\,n}_j z^j_n z^k_m + \sum_{n=m+1}^{d} d^{I\,n}_j z^j_m z^k_n \Big]$$
$$= \sum_{j=1}^{d} \sum_{n=m+1}^{d} d^{I\,n}_j (z^j_m z^k_n - z^j_n z^k_m) + \sum_{j=1}^{d} \sum_{n=1}^{d} o(1) |z^j_n|^2 + g^I z^k_m,$$

where $I = 1, \ldots, \frac{1}{2} d(d+1)$, $m = 1, \ldots, d$ and k is fixed. This gives an inhomogeneous, linear system of $\frac{1}{2} d^2 (d+1)$ equation in the $\frac{1}{2} d^2 (d+1)$ variables $z^j_n z^k_m$, where $1 \leq j \leq d$ and $1 \leq n \leq m \leq d$. The definition of $\Delta(u)$ in (2) shows that the determinant of this system is $\Delta(0) \neq 0$. Hence, $z^j_n z^k_m$, where $1 \leq n \leq m \leq d$, can be written in the form

$$c_{pqrs} \partial(z^p, z^q) / \partial(u^r, u^s) + \sum_{p=1}^{d} \sum_{q=1}^{d} o(1) |z^p_q|^2 + c^q_I g^I z^k_q,$$

where c_{pqrs}, c^q_I are constants. In particular, $|z^k_m|^2$, when $m = 1, \ldots, d$, is of this form. Since k is arbitrary on the range $1 \leq k \leq d$, an application of an inequality of the type $|g^I z^k_q| \leq \frac{1}{2} \varepsilon |z^k_q|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} |g^I|^2$ and the boundedness of g^I imply that

$$\sum_{k=1}^{d} \sum_{m=1}^{d} \big(1 - \tfrac{1}{2} \varepsilon + o(1)\big) |z^k_m|^2 \leq C_{pqrs} \partial(z^p, z^q) / \partial(u^r, u^s) + C \varepsilon^{-1},$$

for suitable constants C_{pqrs} and C.

It follows from Lemma 2 that there exists a constant K such that (11) holds for small $|h|>0$ if T is a fixed small sphere $|u|\leq a$. The definitions of I_T and $z=h^{-1}\Delta_i v$ show, therefore, that

$$h^{-2}\sum_{k=1}^{d}\sum_{m=1}^{d}\int_T |\Delta_i v_m^k|^2\,du\leq K$$

for every $i=1,\ldots,d$. Hence, $I_{Th}(v_m^k)\leq Kd$.

By virtue of Lemma 1, v_m^k has strong L^2-derivatives and $\partial^2 v^k/\partial u^j\,\partial u^m=\partial^2 v^k/\partial u^m\,\partial u^j$ exist almost everywhere. Furthermore, $f^I\big(u, v(u), v_1^1(u), \ldots, v_d^d(u)\big)$ can be differentiated by the chain rule almost everywhere with respect to u^k, $k=1,\ldots,d$. The resulting set of $\frac{1}{2}d^2(d+1)$ equations,

$$\partial f^I/\partial u^k+(\partial f^I/\partial v^i)\,v_k^i+(\partial f^I/\partial v_j^i)\,v_{jk}^i=0,$$

is linear in the variables $v_{jk}^i=v_{kj}^i$ and can be solved for these variables, by virtue of (2). The continuity of the functions

$$\partial f^I/\partial u^k,\ (\partial f^I/\partial v^i)\,v_k^i,\qquad \partial f^I/\partial v_j^i \tag{14}$$

shows that $\partial^2 v^i/\partial u^j\,\partial u^k$ can be extended to continuous functions. Thus, v has continuous, second order partial derivatives. This proves the case $\sigma=1$ of (I).

If $\sigma=2$, it follows that the functions (14) are of class C^1 and, hence, $\partial^2 v^i/\partial u^j\,\partial u^k$ is of class C^1; that is, v is of class C^3. Clearly, (I) follows for any $\sigma\geq 1$ by induction.

8. Proof of (II). The transformation rule for metric tensors shows that the equivalence ot (3) und (4) means that the $\frac{1}{2}d(d+1)$ equations

$$g^{ij}(u)\,v_i^k\,v_j^m-h^{km}(v)=0 \tag{15}$$

hold, where (g^{ij}), (h^{km}) are the (symmetric) matrices inverse to (g_{ij}), (h_{km}), respectively. The function of $(u, v, v_1^1, \ldots, v_d^d)$ on the left of (15) is of class C^σ with respect to its $d+d+d^2$ variables, by the assumptions of (II). If $v=v(u)$ and $v_i^k=\partial v^k(u)/\partial u^i$, formal differentiation of (15) with respect to u^j, where $j=1,\ldots,d$, leads to a linear system of equations for the second order partials of v. Furthermore, tne determinant of the matrix of coefficients of these derivatives does not vanish; cf. the transformation rule for the Christoffel symbols. Hence (II) is the particular case of (I) in which (15) plays the role of (1).

9. Proof of (III). The equivalence of (5) and (6) means that

$$\sum_{k=1}^{d} v_k^i v_k^j=\gamma^2\,\delta^{ij}, \tag{16}$$

where δ^{ij} is 1 or 0 according as $i=j$ or $i\neq j$. After an affine change of variables, it can be supposed that $u=0$ is a point of the u-domain under consideration and that

$$v_k^i(0)=\delta^{jk}. \tag{17}$$

Let i, h, Δ_i, and z have the same significance as in (12). Then (16) and (17) show that

$$z_k^j + z_j^k = (h^{-1}\Delta_i\gamma^2)\,\delta^{jk} + \sum_{m=1}^{d}\sum_{n=1}^{d} o(1)\,|z_n^m|, \tag{18}$$

where the $o(1)$ refers to $|u|\to 0$ and $0<|h|\to 0$.

If $j=k$, then the last relation becomes

$$z_j^j = \tfrac{1}{2}(h^{-1}\Delta_i\gamma^2) + \sum_{m=1}^{d}\sum_{n=1}^{d} o(1)\,|z_n^m|. \tag{19}$$

This formula and the corresponding one for z_k^k show that

$$z_j^j - z_k^k = \sum_{m=1}^{d}\sum_{n=1}^{d} o(1)\,|z_n^m|. \tag{20}$$

Hence, by (18) and (20), where $j\neq k$,

$$z_j^j z_k^k - z_k^j z_j^k = \tfrac{1}{2}\left(|z_j^j|^2 + |z_k^k|^2 + |z_k^j|^2 + |z_j^k|^2\right) + \sum_{m=1}^{d}\sum_{n=1}^{d} o(1)\,|z_n^m|^2. \tag{21}$$

Clearly, this implies an inequality of the type (10).

The proof of (I) implies, therefore, that the function $v=v(u)$ (of class C^1) has strong, second order, L^2-derivatives in a vicinity of $u=0$; in particular, $\partial^2 v^i/\partial u^j\partial u^k$ exists and equals $\partial^2 v^i/\partial u^k\partial u^j$ almost everywhere. It follows from (16) and $\gamma>0$ that γ has strong, first order, L^2-derivatives.

It will now be verified that a standard proof of LIOUVILLE's theorem ([*1*], pp. 460—462) involving the Lamé equations can be carried out under these differentiability conditions on $v=v(u)$ and $\gamma=\gamma(u)$.

The derivation formulae for (16) (that is, the transformation rules for the Christoffel symbols) are valid almost everywhere and give

$$v_{ij} = \gamma^{-1}(\gamma_j v_i + \gamma_i v_j) \qquad \text{if } i\neq j, \tag{22}$$

$$v_{ii} = \gamma^{-1}\Big(\gamma_i v_i - \sum_{k\neq i}\gamma_k v_k\Big). \tag{23}$$

Let $y_i=y_i(u)$ denote the unit vector

$$y_i = \lambda v_i, \qquad \text{where } \lambda=\gamma^{-1}. \tag{24}$$

(Note that the subscript i on y_i does not denote partial differentiation.) The vectors (24) have strong L^2-derivatives and (22), (23) imply

$$\partial y_i/\partial u^j = -\lambda_i v_j \qquad \text{if } i\neq j, \tag{25}$$

$$\partial y_i/\partial u^i = \sum_{k\neq i}\lambda_k v_k \tag{26}$$

almost everywhere.

Let the i-th coordinate u^i be fixed, not on a certain 1-dimensional zero set. Then (25) gives

$$\int_J \lambda_i\,dv = 0, \tag{27}$$

if J is, for example, the boundary of a rectangle $a^j \leq u^j \leq b^j$, $a^k \leq u^k \leq b^k$, $u^m = \text{const}$ if $m \neq j, k$; $i \neq j, k$; and the numbers a^j, b^j, a^k, b^k do not belong to certain 1-dimensional zero sets. Obvious modifications of the proof of Theorem 2, [2], p. 328, show that λ_i does not depend on u^j if $j \neq i$; that is, $\lambda_i = \partial\lambda/\partial u^i$ which is defined almost everywhere is a function only of the i-th component u^i of u. (The proof in [2] remains essentially valid for the present situation since the property of having strong L^2-derivatives is invariant under C^1 changes of the independent variables.)

If $i, j\ (\neq i)$ are fixed, the relations (25), (26) imply

$$\int_J \lambda_i v_j \, du^j - \Big(\sum_{k \neq i} \lambda_k v_k\Big) du^i = 0, \tag{28}$$

if J is the boundary of a rectangle $a \leq u^i \leq b$, $\alpha \leq u^j \leq \beta$, $u^k = \text{const}$ if $k \neq i, j$, and a, b, α, β do not belong to a certain 1-dimensional zero set. Since λ_k depends only on u^k, (28) gives

$$\lambda_i(b)\, s(b) - \lambda_i(a)\, s(a) - \sum_{k \neq i} \lambda_k(u^k)\,[t_k(\beta) - t_k(\alpha)] = 0, \tag{29}$$

where

$$\left\{ \begin{aligned} s(u^i) = s(u^i, \alpha, \beta) = v(u^1, \ldots, u^{j-1}, \beta, u^{j+1}, \ldots, u^d) - \\ - v(u^1, \ldots, u^{j-1}, \alpha, u^{j+1}, \ldots, u^d) \end{aligned} \right. \tag{30}$$

and

$$t_k(u^j) = t_k(u^j, a, b) = \int_a^b v_k(u)\, du^i. \tag{31}$$

Rewrite (29) in the form

$$s(b)\,[\lambda_i(b) - \lambda_i(a)] = -\lambda_i(a)\,[s(b) - s(a)] + \sum_{k \neq i} \lambda_k(u^k)\,[t_k(\beta) - t_k(\alpha)]. \tag{32}$$

Consider a, α, β, u^k for $k \neq i$ to be fixed and b to be a variable. Then $s(b)$ is of class C^1. Also $t_k(u^j, a, b)$ is of class C^1, as a function of b; cf. (31). Thus, by (32), $s(b)\,[\lambda_i(b) - \lambda_i(a)]$ is of class C^1. The vector $s(b)$ does not vanish if α and β are suitably chosen (and fixed), for v cannot be a constant on any u^j-interval; cf. (16).

It follows that $\lambda_i(u^i) = \partial\lambda/\partial u^i$ can be extended to a continuous function and so, λ has continuous partial derivatives with respect to u^i, $i = 1, \ldots, d$. Thus λ (hence γ) is of class C^1. By (II), $v = v(u)$ is of class C^2.

Divide (32) by $b - a$ and let $b \to a$. It follows that λ_i has a derivative λ_{ii} with respect to u^i and that

$$s(a)\, \lambda_{ii}(a) = -\lambda_i(a)\,\{v_i\} + \sum_{k \neq i} \lambda_k(u^k)\,\{v_k\},$$

where $\{g\}$ denotes the difference of the values of g when $u^i = a$, $u^j = \beta$ and $u^i = a$, $u^j = \alpha$. Consequently, λ has continuous second derivatives, λ_{ii} and $\lambda_{ij} = 0$ if $i \neq j$. Hence, by (II), $v = v(u)$ is of class C^3. The proof of (III) can now be completed as in [1], pp. 460–462.

References

[1] BIANCHI, L.: Lezioni di Geometria Differenziale. Pisa (1894). — [2] HARTMAN, P.: Systems of total differential equations and Liouville's theorem on conformal mappings. Amer. J. Math. **69**, 327—332 (1947). — [3] HARTMAN, P.: On unsmooth two-dimensional Riemannian metrics. Amer. J. Math. **74**, 215—226 (1952). — [4] HARTMAN, P., and A. WINTNER: On the solutions of certain overdetermined systems of partial differential equations. Archiv Math. **5**, 168—174 (1954). — [5] HARTMAN, P., and A. WINTNER: Regular binary Pfaffians and non-parabolic partial differential equations. Rend. Circ. Math. Palermo (2) **3**, 347—362 (1954). — [6] MORREY, C. B.: On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126—166 (1938). — [7] NIRENBERG, L.: On a generalization of quasi-conformal mappings and its applications to elliptic partial differential equations. Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. Princeton 1954, pp. 95—100. — [8] SÓLYI, A.: Über Funktionen, die ein endliches Dirichletsches Integral haben. Acta Sci. Math., Szeged **10**, 48—54 (1941).

University of California, Los Angeles and The Johns Hopkins University, Baltimore

(Eingegangen am 1. Oktober 1957)

Landolt-Börnstein

Zahlenwerte und Funktionen

aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik

Sechste Auflage. Unter vorbereitender Mitwirkung von J. D'Ans, A. Eucken †, G. Joos, W. A. Roth †. Herausgegeben von **J. Bartels, P. ten Bruggencate, H. Hausen, K. H. Hellwege, Kl. Schäfer, E. Schmidt.** In vier Bänden.

Im Oktober 1957 erschien:

IV. Band: **Technik** (in 4 Teilen)

3. Teil: **Elektrotechnik, Lichttechnik, Röntgentechnik**

Bearbeitet von R. Berthold, W. Claußnitzer, W. Geffcken, R. Glocker, R. Jaeger, W. Kast, K.-H. v. Klitzing, H. Lau, E. Lax, A. Lompe, W. Meidinger, R. Ochsenfeld, A. Schleede, E. Schmid, P. Schulz, A. Schulze, C. Schusterius, O. Vaupel, H. Weyerer. Herausgegeben von **Ernst Schmidt.** Mit 2117 Abbildungen. XV, 1076 Seiten 4^0. 1957. In Moleskin DM 396.—

Inhaltsübersicht: **Elektrotechnik.** Elektrische Leitung in festen und flüssigen Stoffen. (Ohne Elektrolyse.) Thermoelemente. Elektrizitätsdurchgang durch Gase (Elektrizitätsleitung in Gasen. Durchbruchspannungen in Gasen). Elektrische Isolierstoffe. Magnetische Werkstoffe. — **Lichttechnik.** Bezeichnungen der Strahlungsgrößen. Empfindlichkeit des menschlichen Auges für Strahlung. Leuchtstoffe. Lichtquellen. Lichtfilter. Photographische Schichten. — **Röntgentechnik.** Maße und Einheiten der Röntgentechnik. Allgemeine Röntgentechnik. Medizinische Röntgentechnik. Messung von elastischen Spannungen mit Röntgenstrahlen. Grobstruktur-Untersuchungen mit Röntgen- und Gamma-Durchstrahlung. Feinstrukur-Untersuchungen.

Früher erschien:

1. Teil:

Stoffwerte und mechanisches Verhalten von Nichtmetallen

Bearbeitet von R. Bierl, B. Boonstra, E. vom Ende, J. Endell, W. Fritz, R. Houwink, H. R. Jacobi, P.-A. Koch, F. Kollmann, Th. Kristen, C. Kux, P. Lagally, E. Lax, S. Peter, L. Schiller, G. Schinke, H. Schönborn, G. V. Schulz, K. Schuster, C. Schusterius, Ph. Siedler, G. Vogelpohl. Herausgegeben von **Ernst Schmidt.** Mit 1104 Abbildungen. XVI, 881 Seiten 4^0. 1955. In Moleskin DM 288.—

In Vorbereitung:

2. Teil: **Metallische Werkstoffe**

4. Teil: **Wärmetechnik**

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, P. R. Halmos, M. Kneser, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner. Neue Folge

Heft 15:

Theorie der Limitierungsverfahren

Von Dr. **Karl Zeller**, Tübingen. VIII, 242 Seiten Gr.-8°. 1958.

Steif geheftet DM 36.80

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. **Grundbegriffe der Limitierung.** Zusammenfassung. Geschichte der Limitierungstheorie. Allgemeine Limitierungstheorie. Matrixverfahren. Hauptprobleme. Nichtmatrixverfahren. Absolute Limitierbarkeit. Limitierung von Mehrfachfolgen. Integraltransformationen. Sonstiges. — **Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis.** Zusammenfassung. Lineare Räume. Einfache Sätze über lineare Räume. Das Fortsetzungsprinzip. Stetigkeitssätze. Grundmenge und Basis. *FK*-Räume. Matrizenrechnung. Banach-Algebren und Fourier-Transformation. Sonstiges. — **Struktur von Wirkfeldern.** Zusammenfassung. Wirkfelder als *FK*-Räume. Perfekte Verfahren. Abschnittskonvergenz. Allgemeine Limitierbarkeitskriterien. Einfolgenverfahren. Vorgeschriebenes Wirkfeld. Inäquivalenzsätze. Beschränkte Folgen. Sonstiges. — **Direkte Sätze.** Zusammenfassung. Einschließungssätze. Kernsätze. Konvergenzfaktoren. Vergleichssätze. Verträglichkeit. Varianten der Vergleichssätze. Translation und Umordnung. Multiplikationssätze. Sonstiges. — **Umkehrsätze.** Zusammenfassung. Wachstumsbedingungen. Konvergenzgleiche Verfahren. Lückenumkehrsätze. Elementare Umkehrsätze. Optimale Umkehrbedingungen. Tieferliegende Umkehrsätze. Die Methoden von Littlewood, Wiener, Karamata und Schmidt. Funktionentheoretische Umkehrsätze und Beweise. Sonstige Umkehrsätze. — **Verfahren vom Cesàro-Abel-Typ.** Zusammenfassung. Arithmetische und bewichtete Mittel. Cesàro-Verfahren. Hölder- und Cesàro-Verfahren. Das Abel-Verfahren. Mehrfachfolgen. Integraltransformationen. Die Laplace-Transformation. Riesz- und Dirichlet-Verfahren. Sonstiges. — **Verfahren funktionentheoretischen Typs.** Zusammenfassung. Zweierverfahren. Das Nörlund-Verfahren. Die Verfahren von Euler-Knopp. Allgemeine Euler-Verfahren. Borel-Verfahren. Varianten des Borel-Verfahrens. Kreisverfahren. Analytische Fortsetzung. Sonstiges. — **Weitere Verfahren und Klassen.** Zusammenfassung. Hausdorff-Verfahren. Das Verfahren von de la Vallée-Poussin. Gronwall-Verfahren. Rogosinski-Bernstein-Verfahren. Riemann-Verfahren. Zahlentheoretische Verfahren. Wiener-Verfahren. Klassen von Verfahren. Sonstiges. — Literaturverzeichnis. Sachverzeichnis. — Verzeichnis der Verfahren. — Verzeichnis der Sätze. — Bezeichnungen.

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

SPRINGER-VERLAG BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany